Hur simuleras Differential-Algebraiska Ekvationer?

Jonas Elbornsson

December 2, 2000

1 Inledning

Detta är en sammanfattning av metoder för simulering av Differential-Algebraiska Ekvationer (DAE) för kursen i Modellering given av Reglerteknik HT 2000. Först beskrivs kortfattat metoder för simulering av Ordinära Differential-Ekvationer (ODE) eftersom simuleringsmetoderna för DAE bygger på dessa. En DAE kan innehålla både differentialekvationer och statiska samband och kan allmänt beskrivas av

$$F(\dot{y}, y) = 0 \tag{1}$$

2 Simuleringsmetoder för ODE

Här beskrivs metoder för att lösa ODE, dvs system av typen

$$\dot{y} = f(t, y) \tag{2}$$
$$y(t_0) = y_0 \tag{3}$$

2.1 Eulers metod

Eulers metod går ut på att man integrerar differentialekvationen över ett kort tidsintervall, h:

$$y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} f(\tau, y) d\tau \tag{4}$$

Sedan approximeras integralen med värdet i ändpunkten

$$\int_t^{t+h} f(\tau, y) d\tau \approx h f(t, y(t)) \tag{5}$$

Detta ger simuleringsformeln

$$y_{n+1} = y_n + h f(t, y_n) \tag{6}$$
$$y(t_0) = y_0 \tag{7}$$

2.2 Runge-Kutta-metoder

Idén med Runge-Kutta-metoder är att förbättra simuleringsnoggrannheten genom att integralen skattas noggrannare.

$$\int_t^{t+h} f(\tau, y(\tau))d\tau \approx h \sum_{i=1}^{s} f(t + c_i h, y(t + c_i h)) \tag{8}$$

$y(t + c_i h)$ måste approximeras eftersom de inte är kända vid tidpunkten t. En s-stegs Runge-kutta-metod ges av

$$
\begin{align}
k_1 &= hf(t_n, y_n + a_{11}k_1 + \cdots + a_{1s}k_s) \tag{9}\\
k_2 &= hf(t_n + c_2 h, y_n + a_{21}k_1 + \cdots + a_{2s}k_s) \tag{10}\\
&\vdots \tag{11}\\
k_s &= hf(t_n + c_s h, y_n + a_{s1}k_1 + \cdots + a_{s,s-1}k_{s-1}) \tag{12}\\
y_{n+1} &= y_n + b_1 k_1 + \cdots + b_s k_s \tag{13}
\end{align}
$$

Om $a_{ij} \neq 0$, $j \geq i$ någonstans är Runge-Kutta-metoden implicit och ett olinjärt ekvationssystem måste lösas för varje iteration.

2.3 Multistegsmetoder

Multistegsmetoder skiljer sig från Euler och Runge-Kutta genom att flera gamla y-värden används istället för bara ett.

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_{n+1} = h \sum_{i=1}^{k} \beta_i f(t_{n+i}, y_{n+i}) \tag{14}$$

De första k värdena av y måste vara kända eller beräknas med någon enstegsmetod. Även här finns explicita och implicita varianter.

3 Simuleringmetoder för index 1 problem

Index 1 problem kan skrivas på formen

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= f(y, z)\\
0 &= g(y, z)
\end{aligned} \tag{15}
$$

Eulers metod kan användas direkt på detta system genom att lösa ekvationssystemet $0 = g(y_n, z_n)$ numeriskt map z_n i varje steg. Eulers metod har dock dålig noggrannhet.

3.1 Runge-Kutta-metoder

Runge-Kutta-metoder kan användas på index 1 problem genom ett litet trick. Betrakta systemet

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= f(y, z)\\
\varepsilon\dot{z} &= g(y, z)
\end{aligned} \tag{16}
$$

Då $\varepsilon \to 0$ övergår 16 till DAE:n 15. På systemet 16 kan Runge-Kutta användas. Välj en Runge-Kutta-metod med koefficienter a_{ij}, b_j och applicera på systemet 16.

$$Y_{ni} = y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(Y_{nj}, Z_{nj}) \tag{17}$$

$$\varepsilon Z_{ni} = \varepsilon z_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} g(Y_{nj}, Z_{nj}) \tag{18}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i f(Y_{ni}, Z_{ni}) \tag{19}$$

$$\varepsilon z_{n+1} = \varepsilon z_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i g(Y_{ni}, Z_{ni}) \tag{20}$$

Y_{ni}, Z_{ni} är en omparametrisering av RK-koefficienterna k_i.

$$Y_{ni} = y_n + \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j^{(y)} \tag{21}$$

$$Z_{ni} = z_n + \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j^{(z)} \tag{22}$$

där $k_i^{(y)}$ och $k_i^{(z)}$ är de delar av k_i som hör till respektive variabel. Bilda matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix} \tag{23}$$

RK-metoden måste vara sådan att A är inverterbar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{s1} & \cdots & \omega_{ss} \end{pmatrix} \tag{24}$$

Från 18 kan man då lösa ut $g(Y_{ni}, Z_{ni})$

$$hg(Y_{ni}, Z_{ni}) = \varepsilon \sum_{j=1}^{s} \omega_{ij} (Z_{nj} - z_n) \tag{25}$$

Genom att sätta in 25 i 20 kan man eliminera ε ur uppdateringen av z_n. Sedan kan man sätta $\varepsilon = 0$ och få en iterationsformel

$$Y_{ni} = y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(Y_{nj}, Z_{nj}) \tag{26}$$

$$0 = g(Y_{nj}, Z_{nj}) \tag{27}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i f(Y_{ni}, Z_{ni}) \tag{28}$$

$$z_{n+1} = (1 - \sum_{i,j=1}^{s} b_i \omega_{ij}) z_n + \sum_{i,j=1}^{s} b_i \omega_{ij} Z_{nj} \tag{29}$$

Man måste alltså lösa ett olinjärt ekvationssystem numeriskt i varje iteration. Man kan visa att det globala felet för en RK-metod av ordning p är

$$y_n - y(t_n) = O(h^p) \tag{30}$$
$$z_n - z(t_n) = O(h^p) \tag{31}$$

dvs lika bra som för ODE.

3.2 Multistegsmetoder

Multistegsmetoder kan användas på index 1 problem med samma trick som användes för RK-metoder

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=1}^{k} \beta_i f(y_{n+i}, z_{n+i}) \tag{32}$$
$$\varepsilon \sum_{i=1}^{k} \alpha_i z_{n+i} = h \sum_{i=1}^{k} \beta_i g(y_{n+i}, z_{n+i}) \tag{33}$$
$$\tag{34}$$

Här får man direkt simuleringsformeln genom att sätta $\varepsilon = 0$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=1}^{k} \beta_i f(y_{n+i}, z_{n+i}) \tag{35}$$
$$0 = h \sum_{i=1}^{k} \beta_i g(y_{n+i}, z_{n+i}) \tag{36}$$
$$\tag{37}$$

Även här måste ett olinjärt ekvationssystem lösas numeriskt i varje steg. Det globala felet för en multistegsmetod av ordning p är

$$y_n - y(t_n) = O(h^p) \tag{38}$$
$$z_n - z(t_n) = O(h^p) \tag{39}$$

dvs även här lika bra som för ODE

4 Simuleringmetoder för index 2 problem

För index 2 problem krävs olika metoder för olika typer av system, här betraktar vi semiexplicita system:

$$\dot{y} = f(y, z) \tag{40}$$
$$0 = g(y) \tag{41}$$

För system av typen 40 kan samma metoder som för index 1 användas, dvs både RK-metoderna och multistegsmetoderna. Skattningsfelet kan dock bli större för index 2 problem. För tex en multistegsmetod av ordning p blir det lokala felet

$$y_n - y(t_n) = O(h^{p+1}) \tag{42}$$
$$z_n - z(t_n) = O(h^p) \tag{43}$$

Det globala felet kan uppskattas under vissa antaganden och kan i vissa fall bli lika bra som i index 1 fallet. Det finns flera specialfall av RK-metoderna, där man kan visa olika resultat. Ex

- Projicerade Runge-Kutta-metoder
- "Collocation methods"

För vissa metoder blir felet större om steglängden minskas för mycket, så att felet kan vara av typ $O(h^p + \frac{1}{h})$

5 Referenser

[1] E. Hairer, G.Wanner
Solving Ordinary Differential Equations II, Stiff and Differential Algebraic Problems
Springer-Verlag, 1991
[2] E. Hairer, G.Wanner
Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems
Springer-Verlag, 1991
[3] Paul M. Frank (Editor)
Advances in control Kapitel 9: Nonlinear Descriptor Systems, S.L. Campbell, R. Nikoukhah, F. Delebeque s. 247-282
Springer 1999