

Niclas Persson, Control and Communication

Dagens meny:

Gömda villkor i DAE:er

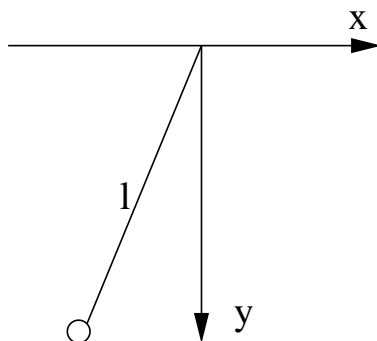
Hur hittar man gömda villkor?

Pantelides algoritim

Tilldelning av initial värden

Steward's path

Enkel pendel



Pendel systemet i Cartesiska & Polära koordinater:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = -Tx \\ \ddot{y} = -Ty + g \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \\ \dot{u} = -Tx \\ \dot{v} = -Ty + g \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -g \sin(\theta) \end{array} \right\}$$

Gömnda villkor

- Uppenbart villkor $x^2 + y^2 = 1$ pendelns längd
- Gömnda villkor, derivering av ekvationen ovan
 $xu + yv = 0 \Rightarrow$ villkor för hastigheterna
 $x\dot{u} + y\dot{v} + u^2 + v^2 = 0$
...
 $-\dot{T} - 3gv = 0$
- Om man byter ut den sista ekvationen i original systemet mot den nya ekvationen fås ett system av ODE:er

Hur hittar man de gömda villkoren på ett systematiskt sätt

- Vilka ekvationer skall man derivera?
- Hur många gånger skall man derivera respektive funktion?

Svar: Pantelides algoritm

Två definitioner

Definition 1: En delmängd av ekvationer där antalet variabler x från en specifik mängd är mindre än antalet ekvationer i delmängden kallas *structurally singular* map x

Definition 2: En structurally singular delmängds map x kallas *minimally structurally singular* map x om ingen av dess proper delmängder är structurally singular map x

Händelse matris

För pendeln kan man sätta upp en matris som ger vilka ekvationer som respektive variabler förekommer i.

	x	y	u	v	T	\dot{x}	\dot{y}	\dot{u}	\dot{v}
e_1			X			X			
e_2				X			X		
e_3	X				X			X	
e_4		X			X				X
e_5	X	X							

$\{e_1 \dots e_5\}$ *structurally singular* map $\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{u}, \dot{v}\}$

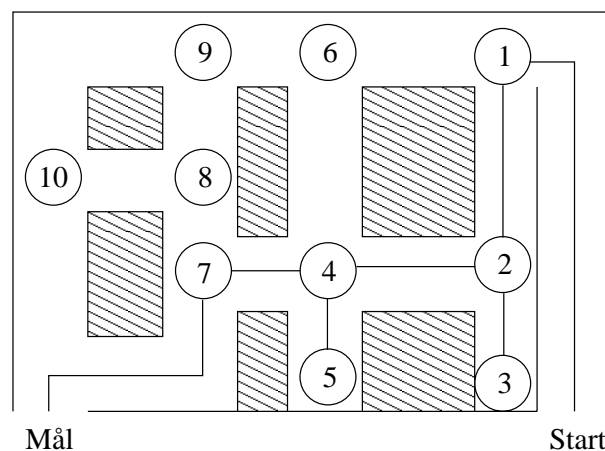
$\{e_5\}$ *minimally structurally singular* map $\{T, \dot{x}, \dot{y}, \dot{u}, \dot{v}\}$

Pantelides algoritm

Pantelides algoritm hittar de *minimally structurally singular* delmängderna.

- Djup-första sökning
- Bipartite grafer
- Referens för den intresserade [1]

Djup-första sökning

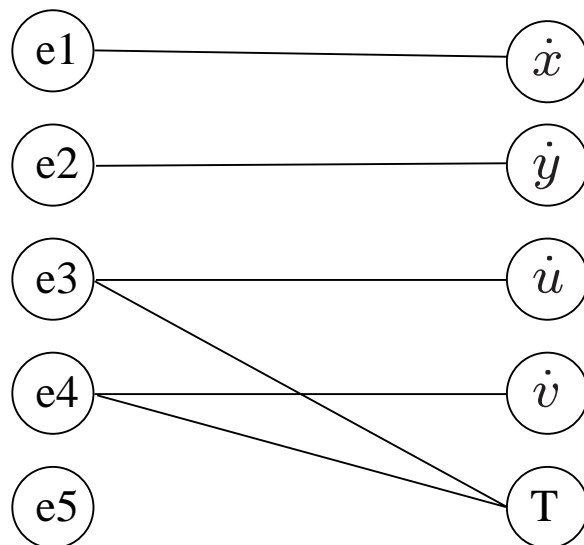


- 1) Välj en väg och sök så djupt det går
- 2a) Är noden en återvändsgränd, gå tillbaka och börja om på 1
- 2b) Är noden slutet, klar

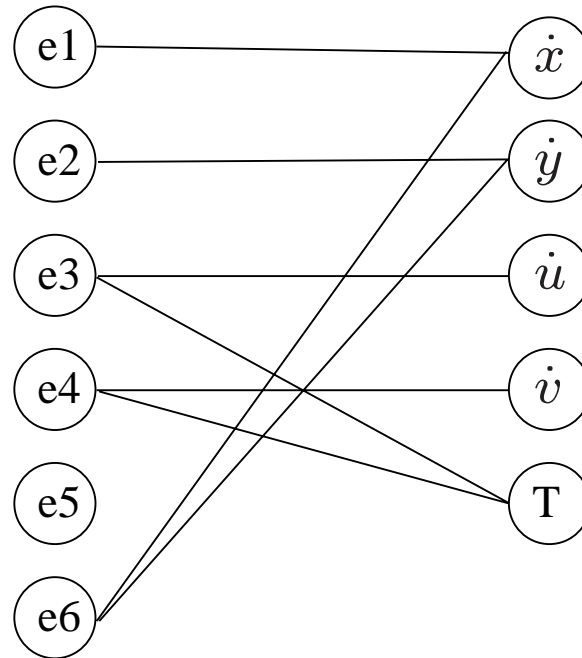
Om det finns en väg från start till mål kommer algoritmen att hitta den

Bipartite 1

Man kan även rita händelse matrisen som en bipartite graf.

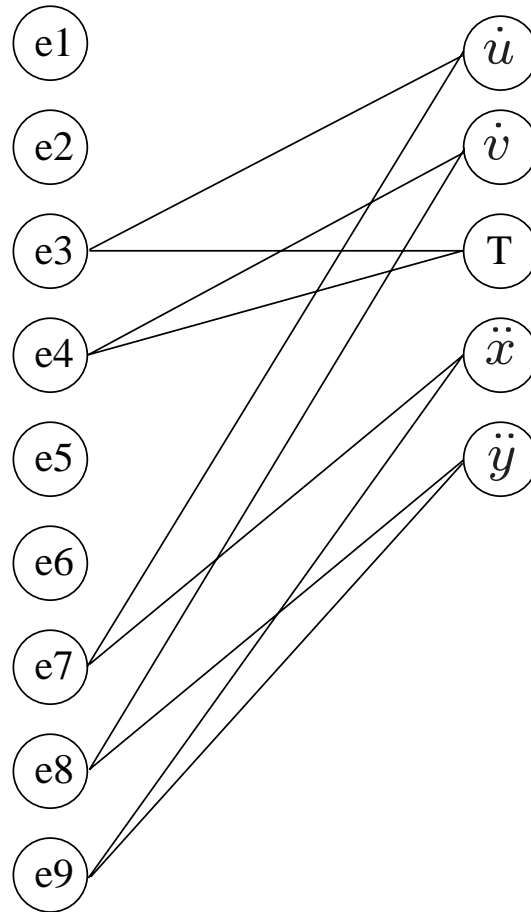


Bipartite 2



$$e_6 = \dot{e}_5$$

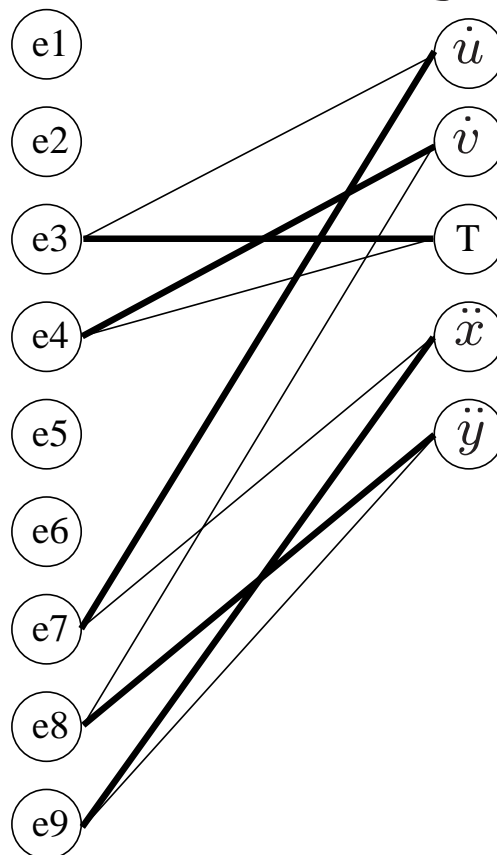
Bipartite 3



$$\begin{aligned} e_7 &= \dot{e}_1 \\ e_8 &= \dot{e}_2 \\ e_9 &= \dot{e}_6 \end{aligned}$$

Bipartite 4

Resultat för Pantelides algoritm



När terminerar Pantelides algoritmen

Definition : Ett DAE system kallas *structurally inconsistent* om det kan bli *structurally singular* med alla förekommande variabler genom att addera differentieringar från en delmängd av dess ekvationer.

Teorem : Pantelides terminerar **om** det utökade systemet är *structurally nonsingular*. Om det utökade systemet är *structurally singular* så är original DAE systemet *structurally inconsistent*

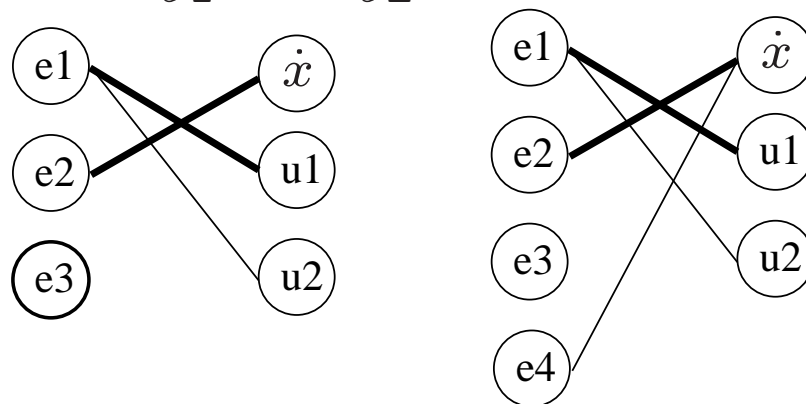
Exempel på ett system som inte terminerar

$$e_1(x, u_1, u_2) = 0$$

$$e_2(x, \dot{x}, y_1) = 0$$

$$e_3(x, y_2) = 0$$

Här är y_1 och y_2 kända utsignaler



Det går inte att hitta en tilldelning till $e_4 \Rightarrow$ systemet är *structurally inconsistent* \Rightarrow Pantelides terminerar inte

Vilket pris får man betala för Pantelides alogritm

Vinst Låg beräkningskomplexitet, $\mathcal{O}(N^3)$, för stora DAE:er istället för tex index reducering.

Algoritmen är grafisk dvs inga numeriska problem.

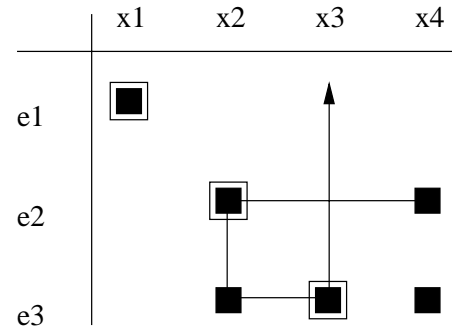
Pris: Det är inte garanterat att man hittar alla ekvationer som måste deriveras och därmed hittar man inte alla gömda ekvationer. Tillräckligt men inte nödvändigt

Tilldelning av initial värden

- Pantelides algoritmen \Rightarrow N ekvationer och M variabler, $N < M \Rightarrow M-N$ DOF
- De $M-N$ variabler som väljs kallas *oberoende* eller *besluts variabler* och de N variabler som beräknas kallas *beroende*
- Den mängd av variabler som kan vara oberoende kallas *valbara*

Steward's path

- Steward's path används för att identifiera den *valbara* mängden variabler



- Den valbara mängden är $E = \{x_2, x_3, x_4\}$
- Genom att välja en av variablerna i E som *oberoende* fås ett strukturellt tillåtet ekvationssystem.

Öppna frågor

Vad finns det för andra metoder förutom Pantelides och Steward's Path ?

- Index reducering
- När räcker Pantelides inte till, och vad kan man använda istället?
- ???

Referenser

- [1] C.C. Pantelides. The consistent initialization of differential-algebraic systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 9(2):213–231, 3 1988.
- [2] Jonas Gillberg. Implementation of methods for the initialization of DAEs. Master's thesis LiTH-ISY-EX-3147, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Jan 2001.
- [3] V. Rico-Ramirez. *Representation, Analysis and Solutions of Conditional Models in an Equation-based Environment*. Phd thesis, Dept. of Chemical Engineering, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania, 1998.
- [4] P. Bujakiewicz and P.P.J van den Bosch. Determination of perturbation index of dae with maximum weighted algorithm. In *Computer-Aided Control System Design. Proceedings, IEEE/IFAC Joint Symposium on*, pages 129–136, 1994.
- [5] B.J. Leimkuhler. Approximation methods for the consistent initialization of differential algebraic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 28(1):205–226, 2 1991.