PDE & FEM

Johan Löfberg

45 minuter med...

- Lite notation
- Konserveringslagar
- Karakterisering av PDEer
- Analytisk lösning
- Numerisk lösning
- Reglering och sånt

Notation

Notationen är typiskt helt bakvänd i PDE & FEM böcker

$$\mathcal{L}(u(x,t)) + f(x,t) = 0$$

$\mathcal{L}$: differentialoperator (t.ex $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$)

t : som vanligt

x : spatial dimension, givet för det fysikaliska problemet

f : extern signal verkande på systemet (värmekälla, krafter...)

u : sökt storhet (temperatur, spänning, flöde...)

Konserveringslagar

Vi börjar direkt med en PDE för att något att arbeta med

$$u_t + \phi_x = f$$

Grundekvationen för en stor mängd fysikaliska PDEer

Variabel	Fysikalisk tolkning	Exempel
$u(x,t)$	densitet av något	antal bilar/km
$f(x,t)$	kvantitet genererad i (x,t)	en infart
$\phi(x,t)$	flux i (x,t)	passerarande bilar i (x,t)

Konserveringslagar bygger på “förändring = in-ut+skapat”

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)dx = \phi(a,t) - \phi(b,t) + \int_a^b f(x,t)dx$$

Om u och ϕ är tillräckligt snälla kan denna integralekvation skrivas om till konserveringslagen.

Konserveringslagar, exempel

Transport av inkompressibelt material : $\phi(x,t) = vu(x,t)$. Konstanten v är hastigheten på transporten.

Generellt : $\phi(x,t) = cu(x,t)$ kallas linjär konvektion.

Om $\phi(x,t) = g(u(x,t))$ kallas det olinjär konvektion.

Trafikmodeller kan modelleras med olinjär konvektion $\phi = u(1-u)$.

Konserveringslagar, exempel

Värmeledning : Om vi inför värme $u(x,t) = \rho CT(x,t)$ så gäller energibalansen (utan källa)

$$u_t + \phi_x = 0$$

Fouriers lag ger $\phi = -KT_x$, dvs värmen flödar dit det är kallare

$$u_t - \frac{K}{\rho C}u_{xx} = 0$$

Generellt : $\phi(x,t) = cu_x(x,t)$ kallas linjär diffusion

Karakterisering av PDE

- Linjäritet : Ungefär som ODE

  $u_t + g(x)u_{xx} = h(x)$: *linjär*
  $u_t + g(u)u_{xx} = h(x)$: *olinjär*

- Ordning : Som ODE, högsta förekommande derivatan
- Struktur : Hyperboliska, elliptiska och paraboliska
- Rand och initialvillkor

Struktur

Man tittar på en andra ordningens PDE

$$Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + F(x, t, u, u_t, u_x) = 0$$

definiera diskriminanten $D = B^2 - 4AC$

Fall	Namn	Exempel
$D > 0$	hyperbolisk	vågekvationen $u_{tt} = c^2 u_{xx}$
$D = 0$	parabolisk	diffusion $u_t - ku_{xx} = 0$
$D < 0$	elliptisk	Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Klassificieringen används för att välja lösningsmetoder etc.

Rand och initialvillkor

- Initialvärdesproblem
  $u(x, 0)$ givet
  Den lättaste sortens problem
  Ofta hyperboliska, t.ex. vågekvationen över oändlig domän
- Randvärdesproblem
  $u(randen, t)$ givet (Dirichlet), $\partial u(randen, t)$ givet (Neuman)
  Svårare att lösa
  Elliptiska problem, t.ex. Laplace
- Initial-randvärdesproblem
  Generella fallet

Analytisk lösning

Precis som i ODE kan detta endast göras för enkla modeller.

Dock, dessa lösningar ger insikt i hur svårare lösningar är uppbyggda.

Vanligaste metoder

- Variabelseparation
- Integraltransformer

Variabelseparation

Ansätt $u(x, t) = y(x)g(t)$ och plugga in i differentialekvationen

Förhoppningsvis får man ett gång med ODE

Kräver viss struktur på både PDE och randvillkor

Variabelseparation, exempel

ärmeledning i 1D, ren diffusion

$$u_t - u_{xx} = 0$$

i ansätter $u(x,t) = y(x)g(t) \Rightarrow y(x)g^{'}(t) = y^{''}(x)g(t) \Rightarrow$

$$\frac{y^{''}(x)}{y(x)} = \frac{g^{'}(t)}{g(t)}$$

ftersom det är x till vänster och t till höger måste

$$\frac{y^{''}(x)}{y(x)} = \frac{g^{'}(t)}{g(t)} = k$$

i har två stycken ODE.

Integraltransformer

Samlingsnamn för Fouriertransformer, Laplacetransformer och andra lite mindre vanliga transformmetoder

Typiskt appliceras transformen på t (de spatiala koordinaterna är ofttast endast definierade över en begränsad domän)

Inga konstigheter

Integral transformer, exempel

ransport med endast linjär konvektion och matning i $x = 0$

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + v u_x(x,t) &= 0 \\ u(0,t) &= r(t) \\ u(x,0) &= 0, \ 0 \le x \le L \end{aligned}$$

aplacetransformera m.a.p. t

$$\begin{aligned} sU(x,s) + v\frac{dU}{dx}(x,s) &= 0 \\ U(0,s) &= R(s) \end{aligned}$$

tandard ODE av första ordningen (i x alltså)

$$U(x,s) = R(s)e^{-sx/v}$$

Integral transformer, exempel

Notera, överföringsfunktionen från $x = 0$ till $x = 1$

$$U(1,s) = R(s)e^{-s/v}$$

Om vi definierar tiden det tar för en partikel att röra sig en längdenhet $T = 1/v$ så har vi

$$U(1,s) = R(s)e^{-sT}$$

En PDE för en tidsfördröjning T är alltså

$$u_t(x,t) + \frac{1}{T}u_x(x,t) = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

Vi kommer tillbaka till detta senare...

Numerisk lösning

I praktiken måste man lösa problemen numeriskt

Vi kommer att titta på

- Finita differensmetoder
- Finita elementmetoder

Finita differensmetoder

Inför en diskretisering i både x och t

Ersätt derivator med differensapproximationer

$$u_x(x,t) \approx \frac{u(x+\Delta,t)-u(x,t)}{\Delta}$$
$$u_t(x,t) \approx \frac{u(x,t+\delta)-u(x,t+\delta)}{\Delta}$$

Ger ett stort ekvationssystem att lösa för elliptiska system.

Ger typiskt ett dynamiskt system för paraboliska och hyperboliska, där värdena i diskretiseringspunkterna i den spatiala dimensionen blir tillstånd.

Finita differensmetoder

- Numerisk stabilitet beror både på δ och Δ.
  För $u_t = u_{xx}$ måste $\delta \leq 0.5\Delta^2$.
- Numeriken kan förbättras genom att använda implicita metoder.
- Enkel att förstå och implementera.
- Kan tyvärr ge dåliga modeller.

Finita elementmetoder

För tillfället kommer vi bara titta på linjära statiska problem,

$$\mathcal{L}(u(x)) + f(x) = 0$$

Vårt mål är att approximera funktionen $u(x)$

Analytiskt vet vi att $u(x)$ för många problem får lösningar i form av en oändlig summa

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \phi_j(x)$$

Finita elementmetoder

Stärkta av vår kunskap om strukturen på en lösning inför vi basfunktioner (oftas kallat trial-functions inom FEM)

$$\phi(x) = [\phi_1(x) \dots \phi_n(x)]$$

samt en okänd parametervektor

$$\theta(x) = [\theta_1 \dots \theta_n]^T$$

Vi definerar vår approximation

$$\hat{u}(x) = \phi\theta$$

Finita elementmetoder, basfunktioner

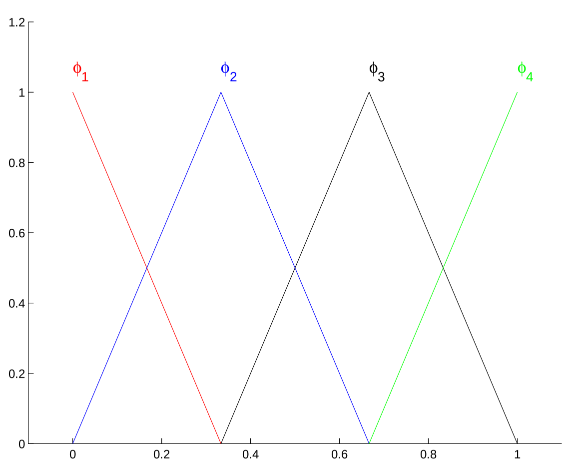
En viktig del av FEM är att välja basfunktionerna.

Diskretisera den spatiala domänen och inför basfunktioner som är lokala kring varje diskretiseringspunkt.

Fördelen är dels numerisk, men även att parametrarna θ får en fysikalisk tolkning. Med lämpligt val av basfunktioner kommer $\theta_i = \hat{u}(x_i)$

Finita elementmetoder, 1D linjär basfunktion

Diskretisering av $(0 \leq x \leq 1)$ i tre element (fyra basfunktioner)



FEM, residualer

Hur väljer vi θ?

Vi skulle vilja minimera $u(x) - \hat{u}(x)$, men vi känner ju inte $u(x)$

Vi vet dock att den korrekta lösningen uppfyller $\mathcal{L}(u(x)) + f(x) = 0$

Detta gäller dock inte för approximationen, utan där har vi

$$\mathcal{L}(\hat{u}(x)) + f(x) = R(x)$$

Ett lämpligt sätt att hitta $\hat{u}(x)$ kan alltså vara att minimera residualen $R(x)$. Detta är grundiden i all FEM.

FEM, olika metoder

Ett gäng metoder för att minimera $R(x)$ finns

- Collocation
- Viktade residualmetoder
- Galerkin
- Minsta kvadrat
- ...

FEM, collocation

Absolut enklaste metoden

Välj ett antal punkter c_i, och sätt

$$R(c_i) = 0$$

Observera att de valda punkterna inte behöver vara någon av diskretiseringspunkterna.

Ger ett linjärt ekvationssystem för att hitta θ.

FEM, viktade residulametoder

Samlingsnamn för de flesta metoderna

Välj viktsfunktioner $\psi_i(x)$ och sätt

$$\int \psi_i(x) R(x) dx = 0$$

Notera, collocation $\Leftrightarrow \psi_i(x) = \delta(x - c_i)$

FEM, viktade residulmetoder

Om vi stoppar in definitionen av $R(x)$ och $\hat{u}(x)$ så har vi

$$\int \psi_i(x)(\mathcal{L}(\phi(x)\theta) + f(x))dx = 0$$

Detta ger ett linjärt ekvationssystem

$$K\theta = b$$

där

$$\begin{aligned} b_i &= -\int \psi_i(x) f(x) dx \\ K_{ij} &= \int \psi_i(x) \mathcal{L}(\phi_j) dx \end{aligned}$$

FEM, Galerkin

Klassisk metod inom FEM.

Är en viktad residualmetod där man väljer

$$\psi_i(x) = \phi_i(x)$$

Har fördelen att den ger symmetriska matriser (efter lite trick)

FEM, Minsta kvadratmetoder

Minimera

$$\int R^2(x)dx$$

Är också en viktad residualmetod ty minimum ger

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}\Big(\int R^2(x)dx\Big) = 2\left(\int \frac{\partial R}{\partial \theta_i} R(x)dx\right) = 0$$

dvs

$$\psi_i(x) = \frac{\partial R(x)}{\partial \theta_i}$$

Programvara

- FEMLAB i MatLab : Generell FEM analys
- PDE i MatLab : Liknande FEMLAB fast lite enklare
- DSolve i Mathematica : Analytisk lösning

Reglering och sånt

För att reglera system med PDEer kan man

- Göra det svårt för sig
- Göra det lite mindre svårt för sig
- eller göra det ganska enkelt

Svårt: Den mesta reglerteorin (med ODE) går att överföra till PDE system. Dock blir matematiken (och regulatorerna) väldigt komplexa. Typiskt så får man regulatorer i form av PDE operatorer.

Mindre svårt: Boundary control. Skapa en regulator med standard teknik, baserad på de (begränsat antal) mätsignaler man har. Analysera stabilitet antingen strikt eller att genom göra en FEM modell av slutna system.

Enkelt: Börja med att göra en FEM modell av systemet. Applicera sedan standard reglerteori på den erhållna modellen (som är en standard finitdimensionell tillståndsmodell)

Referenser

1

S.J. Farlow. *Partial Differential Equations for Scientists & Engineers*. Wiley, 1982.

J. D. Logan. *Applied Partial Differential Equations*. Springer, 1998.

A. Samuelsson and N.E. Wiberg. *Finite Element Method: Basics*. Studentlitteratur, 1998.

N. Ottosen and H. Petersson. *Introduction to the Finitie Element Metod*. Prentice Hall, 1992.

M. Molander. *Computer Aided Modelling of Distributed Parameter Processes*. PhD thesis, Chalmers Universirty of Technology, 1990.