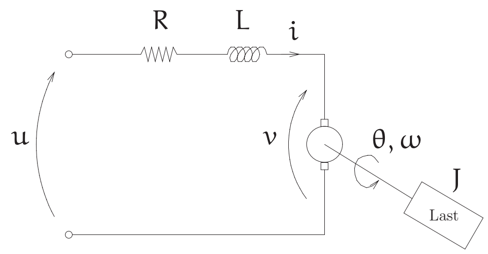
Singulära pertubationer
på 45 minuter

eller

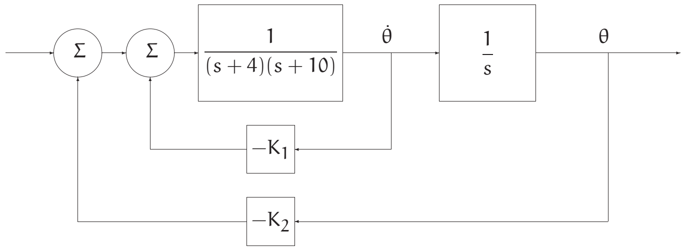
Matematiska alibin
för ingenjörens approximationer

Vad?

DC-motor Försumma induktansen!



Kaskadkoppling Bestäm K_1 och K_2 var för sig!

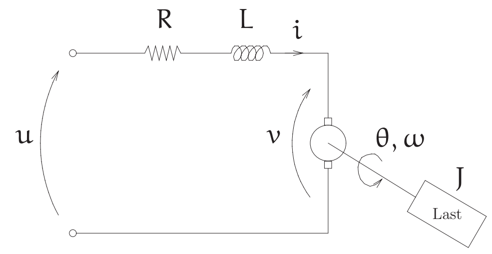


Generellt I systemet finns snabba och långsamma förlopp som man vill behandla *var för sig*.

Varför?

- Lägre dimension $\Rightarrow$ enklare stabilitetsanalys och reglerdesign
- Olika tidsskalor (styvt problem) $\Rightarrow$ besvärligt att simulera

Hur?



$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= k_a i \\ 0 &= u - Ri - L\dot{i} - k_v\omega \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = \dfrac{k_a}{J} i \\ L\dot{i} = u - Ri - k_v\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = \dfrac{k_a}{J} i \\ L\dot{i} = u - Ri - k_v\omega \end{cases}$$

Försummad induktans, $L = 0$, ger det statiska sambandet

$$0 = u - Ri - k_v\omega \quad \Longleftrightarrow \quad i = \frac{1}{R}(u - k_v\omega)$$

och den reducerade dynamiken

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = \dfrac{k_a}{JR}(u - k_v\omega) \end{cases}$$

Generell modell

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \quad x(0) = x_0 & \text{långsam dynamik} \\ \epsilon\dot{y} = g(x, y), \quad y(0) = y_0 & \text{snabb dynamik} \end{cases}$$

Systemet sägs vara **singulärt pertuberat** eftersom en liten förändring av ϵ till $\epsilon = 0$ sänker systemordningen.

P.g.a. dess besvärande inverkan kallas ϵ **parasitisk** (parasitic).

Hur behandla fallet $\epsilon \longrightarrow 0$?

Långsam tidsskala (reduced system)

$$0 = g(x,y) \quad \text{ger} \quad \begin{cases} y_l = h(x_l), & y_l(0) = h(x_0) \neq y_0 \\ \dot{x}_l = f(x_l, h(x_l)), & x_l(0) = x_0 \end{cases}$$

Snabb tidsskala (boundary layer)

Inför den utsträckta tidsskalan $\tau = \frac{t}{\epsilon}$ där $\frac{d}{d\tau} = \epsilon \frac{d}{dt}$

$$\frac{dx}{d\tau} = 0 \quad \text{ger} \quad \begin{cases} x_s(\tau) \equiv x_0 \\ \frac{dy_s}{d\tau} = g(x_0, y_s), & y_s(0) = y_0 \end{cases}$$

Resultat

Resultat om system med singulära system finns gällande

- stabilitet
- simulering
- reglerdesign

Många resultat är **asymptotiska**.
–*Vad gäller då $\epsilon \longrightarrow 0$?*

Några kvantitativa resultat finns, mer eller mindre konservativa.
–*Hur litet måste ϵ vara för att stabilitet hos långsamma och snabba dynamiken medför stabilitet hos det totala systemet?*

Simulering

Inför den ”rena transienten”

$$\eta = y_s - y_l$$
$$\eta(0) = y_0 - h(x_0)$$
$$\frac{d\eta}{d\tau} = g(x_0, \eta + h(x_0))$$

Följande gäller:

$$x(t) = x_l(t) + \mathcal{O}(\epsilon)$$
$$y(t) = y_l(t) + \eta(\tau) + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Linjära system

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \epsilon\dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21}/\epsilon & A_{22}/\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A_\epsilon \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Långsam tidsskala

$$y = -A_{22}^{-1} A_{21} x$$
$$\dot{x} = (A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) x = A_0 x$$

Snabb tidsskala

$$\frac{dy}{d\tau} = A_{21} x_0 + A_{22} y$$

Hur hänger egenskaperna hos A_ϵ, A_0 och A_{22} ihop?

Stabilitet Antag att A_{22} saknar egenvärden på imaginäraxeln. Då gäller

A_ϵ är Hurwitz för $0 < \epsilon < \epsilon_0$ där $\epsilon_0 > 0$ existerar.

$$\Longleftrightarrow$$

A_0 och A_{22} är båda Hurwitz.

Egenvärden Då $\epsilon \to 0$ dras egenvärdena hos A_ϵ mot egenvärdena hos A_0 (långsamma systemet) resp. A_{22}/ϵ (snabba systemet), dvs oändligheten.

Optimal styrning

Givet det singulärt pertuberade systemet

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \epsilon \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

vill vi finna den styrsignal u som minimerar kostnaden

$$J = \int_0^\infty \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + u^T R u \, dt$$

Betraktas hela systemet fås den optimala styrsignalen u_{opt} och kostnaden J_{opt}.

- A-matrisen illa konditionerad $\Rightarrow$ numeriska svårigheter
- ϵ kan svara mot en okänd fysikalisk parameter

Hur nära optimalitet kommer vi om vi designar optimala regulatorer för den långsamma och den snabba dynamiken var för sig?

1. Antag att den snabba dynamiken är stabil och bestäm en optimal regulator för det långsamma, reducerade systemet. Då gäller

$$J = J_{opt} + \mathcal{O}(\epsilon)$$

2. Bestäm optimala regulatorer för den snabba och långsamma dynamiken var för sig. Då gäller

$$J = J_{opt} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$
$$u = u_{opt} + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Olinjär stabilitet

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) & \text{långsam dynamik} \\ \epsilon\dot{y} = g(x,y) & \text{snabb dynamik} \end{cases}$$

Om långsamma och snabba dynamiken är stabila var för sig, blir totala systet då stabilt?

1. Bestäm Lyapunov-funktioner $V(x)$ och $W(x,y)$ sådana att

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x} f(x,h(x)) \\ \frac{\partial W}{\partial y} g(x,y) \end{array}\right\} \quad \text{negativt definita.}$$

2. Kolla att $\frac{\partial W}{\partial x} f(x,y)$ och $\frac{\partial V}{\partial x}(f(x,y) - f(x,h(x)))$ uppfyller vissa villkor.

3. Om så är fallet är totala systemet stabilt för $\epsilon \leq \epsilon^*$ och

$$v = (1-a)V + aW, \quad 0 \leq a \leq 1$$

är en Lyapunov-funktion för systemet.

Genom att undersöka $\dot{v}$ kan a bestämmas så att ϵ^* maximeras.

Referenser

[1] Petar Kokotović, Hassan K. Khalil, and John O'Reilly. *Singular Pertubation Methods in Control: Analysis and Design*. Academic Press, 1986.

[2] Madan G. Singh, editor. *Systems & Control Encyclopedia: Theory, Technology, Applications*. Pergamon Press, 1987.

[3] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, 1993.

[4] Petar V. Kokotović and Richard A. Yackel. Singular pertubation of linear regulators: Basic theorems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972.

[5] Krister "Klubban" Edström. *Swithed Bond Graphs: Simulation and Analysis*. PhD thesis, Linköpings universitet, 1999.