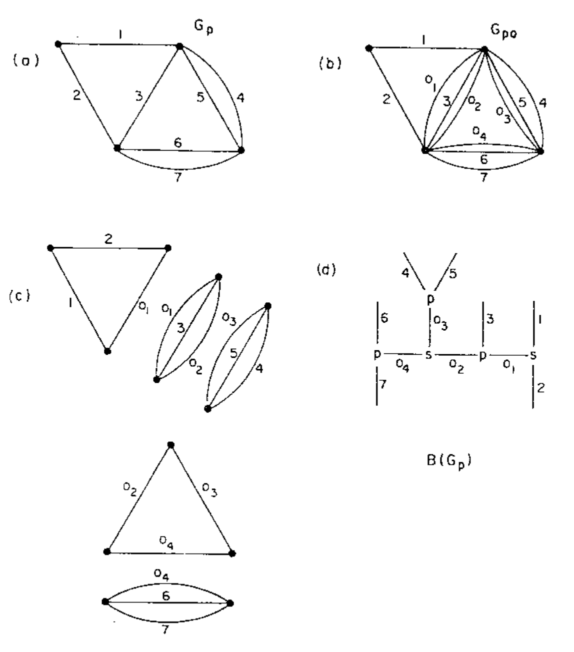
Matematisk teori för bindningsgrafer

- Definition av bindningsgrafer
- Koppling mellan linjära grafer och bindningsgrafer
- Ekvivalensklasser av bindningsgrafer
- Kort om singularitet och kausalitet

Definition 1 av bindningsgraf (Birkett & Roe, [1]):

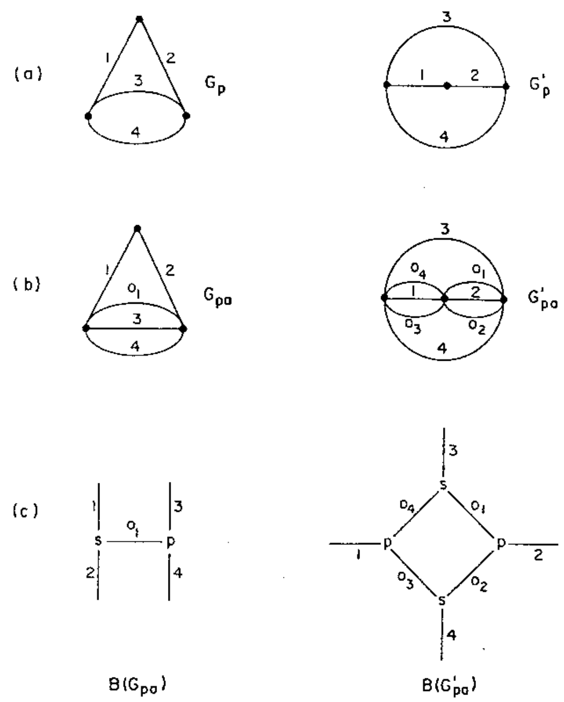
- En bindningsgraf B består av
  1. en graf, (V, E_i), där
     (a) $V = \{$knutpunkter$\}$. V är uppdelad i två delmängder S (serie) och P (parallell),
     (b) $E_i = \{$bindningar$\}$,
     (c) alla bindningar går mellan olika knutpunkter.
  2. $E_e = \{$“externa bindningar”$\}$, som var och en är kopplade till precis en knutpunkt i V.
- **Enkel** bindningsgraf: Inga bindningar går mellan samma två knutpunkter, och det finns inte någon isolerad knutpunkt med bara en bindning.
- **Proper** bindningsgraf: Alla bindningar går mellan en s- och en p-knutpunkt.

Bygg bindningsgraf från linjär graf (“Klipp- och klistrametoden”)



Samma linjära graf kan ge olika bindningsgrafer

(⇒ Behov av ekvivalensklasser...)



Egenskaper hos bindningsgraf skapad med “Klipp- och klistrametoden”

- Proper!
- Extrabågarna i grafen motsvarar inre bindningar i bindningsgrafen.

Det är de inre bindningarna som skiljer sig mellan olika bindningsgrafer för samma system...

Vektorrum för bindningsgraf

B = bindningsgraf

Låt $W(B) = \{\text{delmängder av } E = E_i \cup E_e\}$. Anta att $E = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Låt

$$b_i \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{:te positionen}$$

Med vanlig multiplikation och addition modulo 2 bildar $W(B)$ ett n-dimensionellt vektorrum med 2^n element.

Definiera:

- **s-vektor:** Vektor motsvarande alla bindningar från en s-knutpunkt.
- **p-vektor:** Vektor motsvarande två bindningar från samma p-knutpunkt.
- **B:s s-rum $W_s(B)$:** Underrummet som spänns upp av alla s- och p-vektorer.
- **B:s cykliska rum $W_{cy}(B)$:** Det underrum av $W_s(B)$ vars vektorer endast innehåller element motsvarande de externa bindningarna av B.

Def: Två bindningsgrafer är **s-ekvivalenta** om de har samma cykliskt rum.

Sats: Alla bindningsgrafer från samma linjära graf är s-ekvivalenta!

Problem: Alla s-ekvivalenta grafer kan inte bli härledda från en linjär graf!

Definition 2 av bindningsgraf (Lamb et al., [6]):

En bindningsgraf B består av

1. en graf,
2. en uppdelning av grafens noder i interna och externa noder,
3. en uppdelning av de interna noderna i s- och p-knutpunkter samt **bindningselement**, d v s transformatorer (TF) och gyratorer (GY),
4. energiflödesriktningar för alla bindningar.

Följande måste dessutom gälla:

1. Alla isolerade noder måste vara interna.
2. Det får inte finnas någon bindning mellan två externa noder.
3. Vid transformatorer och gyratorer måste båda bindningar ha samma energiflödesriktning.

Intensiteter och flöden

Till varje bindning b associeras en intensitet $e(b)$ och ett flöde $f(b)$. Definiera (v är en nod):

$$\sigma(b,v) = \begin{cases} 1 & \text{om } b\text{:s energiflödesriktn går in mot } v \\ -1 & \text{om } b\text{:s energiflödesriktn går ut från } v \\ 0 & \text{om } b \text{ inte sitter ihop med } v. \end{cases}$$

- För varje knutpunkt J med bindningar $b_1, \ldots, b_h$, måste gälla:

$$\sum_{i=1}^{h} \sigma(b_i, J) f_i = 0,\ e_1 = \cdots = e_h \text{ om } J = p\text{-knutpkt}$$

$$\sum_{i=1}^{h} \sigma(b_i, J) e_i = 0,\ f_1 = \cdots = f_h \text{ om } J = s\text{-knutpkt}$$

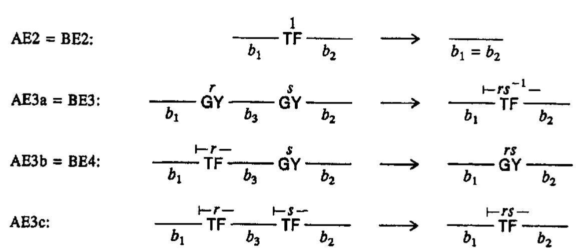
- Till transformatorer associeras ett tal r, som uppfyller $e_1 = re_2$ och $f_2 = rf_1$.
- Till gyratorer associeras ett tal t, som uppfyller $e_1 = rf_2$ och $e_2 = rf_1$.

Ett ekvivalensbegrepp

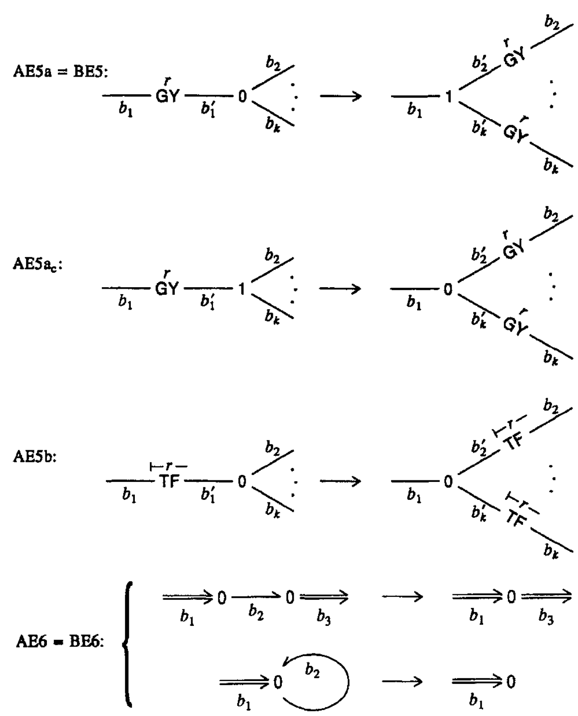
- En uppsättning flöden och intensiteter till en bindningsgraf är **giltiga** om de uppfyller alla föregående ekvationer.
- En tilldelning av flöden och intensiteter till de externa bindningarna är **genomförbar** om det går att hitta värden för de interna bindningarna så att den totala tilldelningen blir giltig.
- Två bindningsgrafer B och B' är **akausalt ekvivalenta** om
  1. de har lika många externa bindningar, och
  2. varje tilldelning av flöden och intensiteter till de externa bindningarna i B är genomförbar *omm* motsvarande tilldelning i B' är det (för någon passande numrering av B och B').

Akausala ekvivalensoperationer:

- AE0 = BE0: Byt alla energiflödesriktningar i en sammanhängande del av grafen.
- AE1 = BE1: Ta bort en knutpunkt utan bindningar, eller en knutpunkt med två bindningar till samma bindningselement.
- AE14 = BE14: Byt en extern nod med k bindningar mot k externa noder med en bindning var.



Akausala ekvivalensoperationer:



Akausala ekvivalensoperationer:

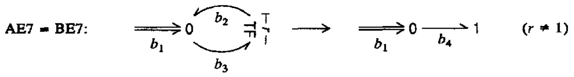
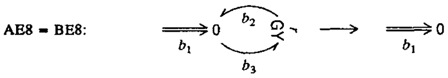


Fig. 7. Contracting a TF-loop.



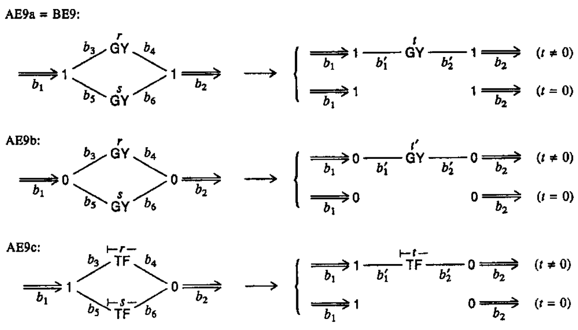
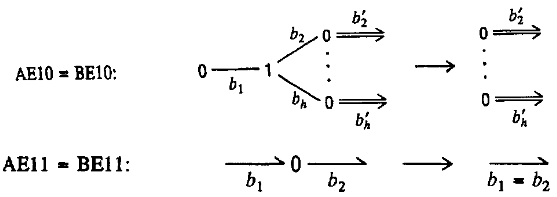


Fig. 9. Combining parallel links $[\sigma_t t = \sigma_r r + \sigma_s s,\ \sigma_{t'} t' = (\sigma_r r^{-1} + \sigma_s s^{-1})^{-1}]$.



Akausala ekvivalensoperationer:

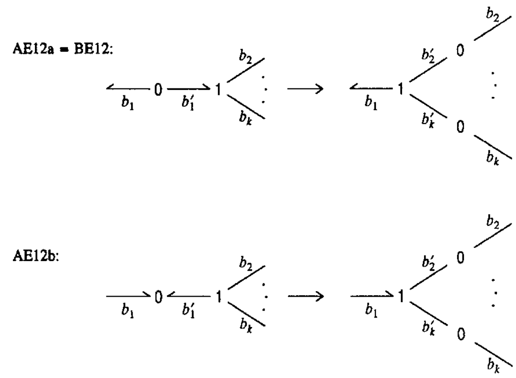


Fig. 12. Passing a 2-out or 2-in junction through another junction ($k \geq 1$).

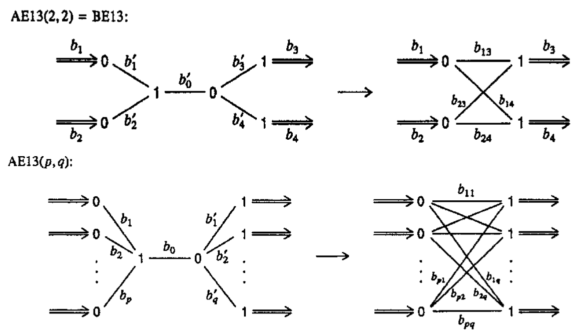


Fig. 14. Replacing a primitive (p, q)-tree by a primitive (p, q)-loop structure $(p, q \geq 0)$. $[\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_0 \sigma_j'$ for $i \in \{1, \ldots, p\},\ j \in \{1, \ldots, q\}$.]

Satser om akausal ekvivalens

Sats: Om två bindningsgrafer är akausalt ekvivalenta, kan den ena erhållas från den andra m h a en sekvens av operationerna BE0–BE14 och deras inverser.

Def: En **länk** är en sekvens av bindningar med endast bindningselement emellan (kan vara en enda bindning).

Def: En **standardbindningsgraf** uppfyller:

(a) Varje extern nod har exakt en bindning.

(b) Ingen bindning går mellan två bindningselement.

(c) Ingen länk börjar och slutar i samma knutpunkt.

(d) Inga länkar med udda antal gyratorer går mellan två olika sorters knutpunkter, och inga länkar med jämnt antal gyratorer går mellan två lika knutpunkter (B är **kontraktionsminimal**).

(e) Inga par av länkar har samma ändpunkter.

(f) Inga bindningselement binder till externa noder.

(g) Varje knutpunkt binder till exakt en extern nod.

Sats: Varje bindningsgraf är akausalt ekvivalent med en standardbindningsgraf.

Satser, forts...

Sats: Låt B vara en bindningsgraf med k externa bindningar. Då gäller:

- De genomförbara tilldelningarna för B bildar ett vektorrum av dimension k.
- Det finns en mängd med k oberoende variabler, en från varje extern bindning, som kan väljas fritt, och som bestämmer värdena för resten av de externa variablerna.

Öppna frågor:

- Är BE0-BE14 oberoende? Är de en minimal mängd operationer?
- Finns det någon standardform som är unik för varje ekvivalensklass?

Singularitet:

Definition:

- En knutpunkt är singulär om dess “gemensamma variabel” (intensitet för p-knutpunkt, flöde för s-knutpunkt) inte är entydigt bestämd av de externa variablerna.
- En bindningsgraf är singulär om den innehåller en singulär knutpunkt.

Finns det alltid någon enklare, ekvivalent bindningsgraf som är ickesingulär? Ja!

Sats: Om J är en singulär knutpunkt i en kontraktionsminimal bindningsgraf B, så är B och $B - J$ akausalt ekvivalenta.

Sats: Varje bindningsgraf är akausalt ekvivalent med en ickesingulär bindningsgraf.

Kausalitet:

Talar om vilka signaler som ska betraktas som in- resp. utsignaler.

Regler:

$$\begin{array}{ccc} & \top & \\ \dashv & p & \dashv \\ & \perp & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \perp & \\ \vdash & s & \vdash \\ & \top & \end{array} \qquad \vdash \; TF \; \vdash \qquad \begin{array}{c} \vdash \; GY \; \dashv \\ \\ \dashv \; GY \; \vdash \end{array}$$

För vilka bindningsgrafer kan man ge en motsägelsefri kausalitetstilldelning?

Sats: En kontraktionsminimal bindningsgraf har en motsägelsefri kausalitetstilldelning *omm* för varje mängd S av knutpunkter, det finns högst $|S|$ isolerade delar i $B - S$ som dels innehåller ett udda antal knutpunkter som inte binder till en extern nod, dels inte innehåller knutpunkter som gör det.

Problem: Svårt att kolla om satsen är uppfylld!

Knyt ihop kausalitet och singularitet

Def: En kausalitetstilldelning för de externa bindningarna är **konsistent** om insignalerna kan väljas oberoende av varandra. (Minns: Går alltid att hitta sådan tilldelning!)

Def: En kausalitetstilldelning är **ickesingulär** om de inre variablerna bestäms entydigt av (de yttre) insignalerna.

Sats: En kausalitetstilldelning är ickesingulär *omm* den är konsistent och B är ickesingulär.

Sats: En bindningsgraf har en ickesingulär kausalitetstilldelning *omm* den är ickesingulär. Då är även varje konsistent val av insignaler möjligt att utvidga till en ickesingulär kausalitetstilldelning.

Referenser

[1] S. H. Birkett and P. H. Roe. The mathematical foundations of bond graphs – I. Algebraic theory. *Journal of the Franklin Institute*, 326(3):320–350, 1989.

[2] S. H. Birkett and P. H. Roe. The mathematical foundations of bond graphs – II. Duality. *Journal of the Franklin Institute*, 326(5):691–708, 1989.

[3] S. H. Birkett and P. H. Roe. The mathematical foundations of bond graphs – III. Matroid theory. *Journal of the Franklin Institute*, 327(1):87–108, 1990.

[4] S. H. Birkett and P. H. Roe. The mathematical foundations of bond graphs – IV. Matrix representations and causality. *Journal of the Franklin Institute*, 327(1):109–128, 1990.

[5] S. H. Birkett. On the special properties of graphic and co-graphic bond-graphs. *Journal of the Franklin Institute*, 330(4):735–761, 1993.

[6] J. D. Lamb, D. R. Woodall, and G. M. Asher. Bond graphs I: Acausal equivalence. *Discrete Applied Mathematics*, 72(3):261–293, February 1997.

[7] J. D. Lamb, D. R. Woodall, and G. M. Asher. Bond graphs II: Causality and singularity. *Discrete Applied Mathematics*, 73(2):143–173, March 1997.

[8] J. D. Lamb, D. R. Woodall, and G. M. Asher. Bond graphs III: Bond graphs and electrical networks. *Discrete Applied Mathematics*, 73(3):211–250, March 1997.

[9] J. D. Lamb, D. R. Woodall, and G. M. Asher. Equivalences of bond graph junction structures. In *International Conference on Bond graph modelling ICBGM '93*, volume 25, pages 79–84, 1993.

[10] J. D. Lamb, D. R. Woodall, and G. M. Asher. Singular bond graphs. In *International Conference on Bond graph modelling ICBGM '93*, volume 25, pages 73–78, 1993.

[11] J. D. Lamb, G. M. Asher, and D. R. Woodall. Causal loops and Mason's rule for bond graphs. In *International Conference on Bond graph modelling ICBGM '93*, volume 25, pages 67–72, 1993.

[12] Hafid Haffaf, Geneviève Dauphin-Tanguy, and Mustapha Kamel Rahmouni. Graphical matroid for causality assignment in bond graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 293(1-3):257–272, May 1999.