Lösningsförslag till tentamen i Reglerteknik (TSIU61) 2016-10-26

1. (II)-B, (IV)-A, (V)-C, (VI)-D. (I) går bort; slutvärde $\frac{1}{10}$, A–D går mot 1. (III) går bort; är instabil. (II) och (VI) komplexa poler, matchar B och D som svänger. B mest dämpad och (II) högst relativ dämpning, alltså (II)-B och (VI)-D. (IV) och (V) reella poler, matchar fullt dämpade A och C. C snabbast motsvarar poler längst till vänster som i (V), alltså (IV)-A och (V)-C.

2. (a) De tre grundläggande begränsningarna är:
   - Osäkerheter i den matematiska modellen av det system som ska styras.
   - Begränsningar hos styrsignalen.
   - Osäkerheter i mätningen av utsignalen.

   (b) Från blockdiagrammet, $Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}R(s) + \frac{1}{1+G(s)}V(s)$ där $R(s) = 0$. Systemet är lineärt och stabilt, alltså sin in ger sin ut. Amplituden för $y(t)$ och given insignal ges alltså av $|\frac{1}{1+G(i3)}| \approx 1.18$.

   (c) Expandera regulatorn och transformera tillbaka den till tidsdomänen:

$$U(s) = 3\frac{2s+3}{s+4}E(s) \Leftrightarrow (s+4)U(s) = (6s+9)E(s) \Leftrightarrow \dot{u}(t) + 4u(t) = 6\dot{e}(t) + 9e(t)$$

   Stoppa in Tustin-operatorn för t och $t-1$ och addera:

$$\Delta_T u(t) + 4u(t) = 6\Delta_T e(t) + 9e(t); \quad \Delta_T u(t-1) + 4u(t-1) = 6\Delta_T e(t-1) + 9e(t-1) \Rightarrow$$
$$\big(\Delta_T u(t) + \Delta_T u(t-1)\big) + 4\big(u(t) + u(t-1)\big) = 6\big(\Delta_T e(t) + \Delta_T e(t-1)\big) + 9\big(e(t) + e(t-1)\big)$$

   Identifiera Tustin-approximationen, $\big(\Delta_T u(t) + \Delta_T u(t-T)\big) = \frac{2}{T}\big(u(t) - u(t-T)\big)$, med $T = 1$:

$$2\big(u(t)-u(t-1)\big)+4\big(u(t)+u(t-1)\big) = 6\cdot 2\big(e(t)-e(t-1)\big)+9\big(e(t)+e(t-1)\big) \Leftrightarrow 6u(t) = -2u(t-1)+21e(t)-3e(t-1).$$

   Slutsvaret är alltså: $u(t) = -\frac{1}{3}u(t-1) + \frac{7}{2}e(t) - \frac{1}{2}u(t-1)$.

3. Problemet passar bra för lead-lag design. Ren proportionell reglering klarar inte kraven. Skärfrekvensen behöver höjas $50^\circ - (-178.5^\circ - -180^\circ) = 48.5^\circ$ vid $w_{c,d} = 10$ (ingen laglänk kommer behövas). $\beta = 0.13$. $\tau_D = 1/(w_{c,d}\sqrt{\beta}) \approx 0.27$. Välj förstärkning för att hitta rätt skärfrekvens, $K = 1/|G(i\omega_{c,d})/\sqrt{\beta}| \approx 2.9$. Det öppna systemet har en pol i origo, vilket ger integrerande verkan så ett referenssteg regleras ut helt, alltså laglänk behövs inte.

   Slutgiltig regulator: $F(s) = 2.9\frac{0.27s+1}{0.13\cdot 0.27s+1} = 2.9\frac{0.27s+1}{0.036s+1}$.

4. (a) Med givet tillstånd ges tillståndformen av systemet av:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{J}u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = Ax + Bu$$

   (b) Bestäm först en tillståndsåterkoppling med rätt poler, vilka ges av $0 = \det\big(Is-(A-BL)\big) = \det\begin{pmatrix} s & -1 \\ \ell_1 & s+\ell_2 \end{pmatrix} = s(s+\ell_2)+\ell_1 = s^2+\ell_2 s+\ell_1$. Motsvarande polynom för poler i -5 är $0 = (s+5)^2 = s^2+10s+25$. Identifiera koefficienterna $\ell_1 = 25$ och $\ell_2 = 10$.

   Återstår att välja ℓ_0. I stationäritet, $0 = \dot{x}_1 = x_2$ och $0 = \dot{x}_2 = -25x_1 - 10x_2 + \ell_0 r \Leftrightarrow x_1 = \ell_0/25r$. Dvs, välj $\ell_0 = 25$. Slutgiltig återkoppling: $u(t) = -25x_1 - 10x_2 + 25r(t)$.

5. (a) Vi kan garantera stabilitet om

$$\left|\frac{F_y(i\omega)G(i\omega)}{1+F_y(i\omega)G(i\omega)}\right| < \frac{1}{|\Delta G(i\omega)|} = 2, \qquad \forall\omega$$

   Den komplementära känslighetsfunktionens belopp måste vara mindre än två för alla frekvenser.

   (b) Vi har systemet $G(s) = \frac{10}{s-5}$ återkopplat med regulatorn $F(s) = 1 + \frac{K_I}{s}$ Det återkopplade systemet har då överföringsfunktionen $G_c(s) = \frac{FG}{1+FG} = \frac{10(s+K_I)}{s^2+5s+10K_I}$ samt polerna, rötterna till nämnarpolynomet, $s^2 + 5s + 10K_I = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10K_I}$. Under villkoret att vi ska ha, till beloppet, lika stor real- som imaginärdel får vi ekvationen

$$\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 - 10K_I = -\left(\tfrac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow K_I = \tfrac{5}{4}.$$