Lösningar till tentamen i Reglerteknik (TSIU61)

Tentamensdatum: 18 augusti 2017

1. (a) Överföringsfunktionen $G(s)$ är $\frac{2s+3}{s^2+7s+1}$.

   (b) Paren är
   I–C (oscillativt, komplexa poler)
   II–D (oscillativt snabbare, komplexa poler längre bort från origo)
   III–B (ej oscillativt, reella poler)
   IV–A (ej oscillativt, långsammare, reella poler närmare origo)

   (c) Känslighetsfunktionen beskriver hur störningar på utsignalen fortplantas till utsignalen vid olika frekvenser. Dessa vill vi dämpa och därmed bör dess amplitud vara låg i alla frekvenser.

   Känslighetsfunktionen beskriver även hur felet $e(t)$ beter sig och eftersom även den bör vara liten önskas en låg amplitud hos känslighetsfunktionen.

2.
$$G(s) = \frac{s+10}{s+2}, \quad F(s) = \frac{3(s+4)}{s}$$

   (a) Överföringfunktionen blir

$$Y(s) = G_v(s)V(s) + G_c(s)R(s) = \frac{1}{1+FG}V(s) + \frac{FG}{1+FG}R(s), \quad G_v(s) = \frac{s(s+2)}{4s^2+44s+120}$$

   (b) $r = 0$ och $v = 3\sin\big(10t\big)$. Vi vet att en sinus in kommer att ge en sinus ut med annan amplitud och fasförskjuten, om systemet är stabilt. Vi börjar med att kolla om systemet är stabilt. Systemets poler är nollställena till nämnarpolynomet och dessa är $\{-5, -6\}$, systemet är alltså stabilt. Utsignalen kommer då att bli $y(t) = 3|G_v(10i)|\sin\big(10t + \arg G_v(10i)\big)$.

$$|G_v(10i)| = 0.2, \quad \arg G(10i) = 0.81$$

   Detta get att $y(t) = 0.6\sin(10t + 0.81)$.

   (c) Det återkopplade systemet $G_c(s)$ har samma poler som $G_v(s)$, alltså $\{-5, -6\}$.

3. Regulatorn kan skrivas som en differentialekvation på formen

$$\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + 3u(t) = \dot{e}(t) + 2e(t).$$

Kursboken s 211 ger att Euler bakåt approximerar första och andra derivata enlist

$$\dot{u}(t) \approx \frac{1}{T}\big(u(t) - u(t-T)\big) \qquad \ddot{u}(t) \approx \frac{1}{T^2}\big(u(t) - 2u(t-T) + u(t-2T)\big).$$

Detta och sampeltiden $T = 0.5$ ger att differentialekvationen kan approximeras med

$$4\big(u(t) - 2u(t-T) + u(t-2T)\big) + 4\cdot 2\big(u(t) - u(t-T)\big) + 3u(t) = 2\big(e(t) - e(t-T)\big) + 2e(t)$$

vilket är

$$15u(t) - 16u(t-T) + 4u(t-2T) = 4e(t) - 2e(t-T)$$

vilket ger svaret

$$u(t) = \tfrac{16}{15}u(t-T) - \frac{4}{15}u(t-2T) + \frac{4}{15}e(t) - \frac{2}{15}e(t-T)$$

4. Givet
   - $\omega_{c,d} = 1\,\text{rad/s}$
   - $\varphi_m = 65°$
   - $e_0 < 0.05$
   - Förstärkningen vid låga och höga frekvenser blir inte större än nödvändigt.

   Kraven på fasmarginal och felmarginal gör att en lead-lag lösning är tillämpbar. P-reglering räcker inte. Skärfrekvensen ω_c är redan den önskade ($\omega_{c,d} = 1\,\text{rad/s}$)! Fasmarginalen behöver ökas cirka $65° - (-140° - -180°) = 25°$ (ingen lag-länk behövs). Det ger, $\beta \approx 0.4$, $\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d} sqrt\beta} \approx 1.58$. Välj förstärkning för att bibehålla skärfrekvensen, $K = \frac{1}{G(i\omega_{c,d})/\sqrt{\beta}} \approx 0.63$.

   Nu studeras felet vid ett steg (e_0). Noteras i figuren att $G(s)$ går mot oändligheten med lutning 1 vid låga frekvenser. Detta ger att felet vid ett steg är (slutvärdesteoremet)

$$e_0 = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + KF_{\text{lead}}(s)G(s)} \frac{1}{s} s = 0$$

   Detta ger att samtliga krav är uppfyllda.

   Svar: En regulator som uppfyller ställda krav är $F_{\text{lead}}(s) = 0.63\frac{1.58s+1}{s+1}$.

5. (a) Ett system är asymptotiskt stabilt då A-matrisens egenvärden har negativ realdel. Lös den karakteristiska ekvationen för att få fram egenvärdena λ_i.

$$\left|\lambda I - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = \{0, 2\}.$$

   Svar: Nej, systemet är inte asymptotiskt stabilt.

   (b) Det slutna systemets poler ges av egenvärdena till $A - BL = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -\ell_1 & 2-\ell_1 \end{smallmatrix}\right)$. Slutna systemets karakteristiska ekvation är alltså:

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \ell_1 & \lambda - 2 + \ell_2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2 + \ell_2) + \ell_1 = \lambda^2 + (\ell_2 - 2)\lambda + \ell_1.$$

   Ett system med två poler i -3 har den karaktäristiska ekvationen: $0 = (\lambda + 3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$. Identifiering av matchande koefficenter ger $\ell_1 = 9$ och $\ell_2 = 8$.

   Återstår att beräkna ℓ_0 för att få rätt förstärkning. I stationaritet gäller:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A - BLx(t) + B\ell_0 r(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \ell_0 r(t) \end{pmatrix}.$$

   Det ger i stationäritet $x_2(t) = 0$, $\ell_0 r(t) = 9x_1$, och $y = x_1 = \frac{\ell_0}{9} r(t)$, dvs $\ell_0 = 9$ för statisk förstärkning 1.

   Svar: $L = \begin{bmatrix} 9 & 8 \end{bmatrix}$ och $\ell_0 = 9$.