Lösningar till tentamen i Reglerteknik (TSIU61)

Tentamensdatum: 17 oktober 2017

1. (a)

$$G(s) = \frac{s^2+s+1}{(s+4)(s^2+2s+2)} = \frac{s^2+s+1}{s^3+6s^2+10s+8} \Leftrightarrow$$
$$\dddot{y}(t) + 6\ddot{y}(t) + 10\dot{y}(t) + 8y(t) = \ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + u(t)$$

(b) Systemet är stabilt (alla poler i HHP), alltså gäller för $u(t) = \sin(t)$:

$$\begin{aligned} y(t) &= |G(i)| \sin\big(t + \arg G(i)\big) \\ |G(i)| &= \frac{|-1+i+1|}{|i+4||-1+2i+2|} = \frac{1}{\sqrt{17}\sqrt{5}} \approx 0.1085 \\ \arg G(i) &= \arg i - \arg(i+4) - \arg(2i+1) = -\tfrac{\pi}{2} - \arctan\tfrac{1}{4} - \arctan\tfrac{2}{1} \approx 0.2187 \\ y(t) &= 0.1085\sin(t + 0.2187) \end{aligned}$$

(c) A–II, B–IV, C–I, D–III.

A och D har liten fasmarginal och matchar därför II och III med tydliga resonanstoppar. A lägre skärfrekvens än D, alltså matchar den mot II som har lägst bandbredd av de två. B och C bra fasmarginal matchar I och IV som saknar resonanstopp. B som släpper minst höga frekvenser av de två, matchar alltså IV med minst bandbredd.

2. (a)

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{\frac{(s+6)4(s+10)}{(s+4)s}}{1+\frac{(s+6)4(s+10)}{(s+4)s}} = \frac{4(s^2+16s+60)}{s^2+4s+4(s^2+16s+60)} = \frac{4s^2+64s+240}{5s^2+68s+240}$$

(b)

$$S(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)} = \frac{1}{1+\frac{(s+6)4(s+10)}{(s+4)s}} = \frac{s^2+4s}{5s^2+68s+240}$$

(c)

$$T(s) = 1 - S(s) = \frac{4s^2+64s+240}{5s^2+68s+240} = G_c(s)$$

3. (a) Skriv om regulatorn som differentialekvation:

$$4\dot{u}(t) + 3u(t) = \dot{e}(t) + 2e(t)$$

Introducera tustins approximation istället för derivatorna

$$4\Delta_t u(t) + 3u(t) = \Delta_t e(t) + 2e(t) \tag{1}$$
$$4\Delta_t u(t-T) + 3u(t-T) = \Delta_t e(t-T) + 2e(t-T) \tag{2}$$

Addera (1) och (2), och identifiera sen $\Delta_t u(t) + \Delta_t u(t-T) = \frac{2}{T}(u(t) - u(t-T))$ och motsvarande för $e(t)$.

$$\begin{aligned} 4(\Delta_t u(t) + \Delta_t u(t-T)) + 3(u(t) + u(t-T)) &= (\Delta_t e(t) + \Delta_t e(t-T)) + 2(e(t) + e(t-T)) \\ 4\tfrac{2}{T}(u(t) - u(t-T)) + 3(u(t) + u(t-T)) &= \tfrac{2}{T}(e(t) - e(t-T)) + 2(e(t) + e(t-T)) \\ u(t) &= \frac{8-3T}{8+3T}u(t-T) + \frac{2+2T}{8+3T}e(t) + \frac{2T-2}{8+3T}e(t-T) \\ u(t) &= \tfrac{13}{19}u(t-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{6}{19}e(t) - \tfrac{2}{19}e(t-\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

(b) Skriv om systemet på standardformen s. 35, $G(s) = \frac{\frac{A}{B}}{1+\frac{1}{B}t}$, nu kan A/B avläsas som slutvärdet i plotten $A/B = 6$ och $1/B$ som systemets tidskonstant (då det når 63% av slutvärdet) $\frac{1}{B} = 2$. Alltså, $B = \frac{1}{2}$ och $A = 6B = 3$.

4. Vid $\omega_{c,d} = 0.64\,\text{rad/s}$ är fasen $-138°$. Kraven kan alltså ej uppfyllas av en P-regulator. En leadlänk krävs, och fasökning med $70° - (180° - 138°) + 6° = 34°$ behövs (vi antar att en laglänk kommer behövas). Fig. 5.13 i boken ger $\beta = 0.28$, och $\tau_D = \frac{1}{\omega_{c,d}\sqrt{\beta}} \approx 2.95$, samt $K = \frac{1}{|G(i\omega_{c,d})||F_{\text{lead}}(i\omega_{c,d})|} \approx \frac{\sqrt{\beta}}{0.6} \approx 0.89$

Felet vid rampstörning (inklusive den laglänk vi kan behöva)

$$e_1 = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sG_o(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{K\frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma}\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D+1}sG(s)} = \frac{\gamma}{0.267}.$$

Värdet på $\lim_{s\to 0} sG(s)$ fås genom att se att asymptoten har lutningen -1 i log-log-skalan, och då beter sig $G(s)$ som $\frac{k}{s}$ för små s, och $k = 0.3$ fås genom att titta var asymptoten skär $\omega = 1$.

Välj $\gamma \approx 0.0027$, för att få $e_1 < 1\%$. Enligt tumregel väljs $\tau_I = \frac{10}{\omega_{c,d}} = 15.6$. Den slutliga regulatorn ges av

$$F(s) = K\frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma}\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D+1} = 0.89\frac{15.6s+1}{15.6s+0.0027}\frac{2.95s+1}{0.83s+1}.$$

5. (a) Låt $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{pmatrix}$, det följer då direkt att

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} x(t) + = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} u(t)$$

(b) Systemet är stabilt om A-matrisens egenvärden ligger i HHP. $0 = \det(sI - A) = (s+1)^2$, dvs båda egenvärdena ligger i -1 alltså är systemet stabilt.

(c) Det återkopplade systemets poler ges av egenvärdena till $A - BL$, vilket ger den karaktäristiska ekvationen

$$0 = \det(sI-(A-BL)) = \det\begin{pmatrix} s+1+\ell_1 & \ell_2 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix} = (s+1+\ell_1)(s+1)+\ell_2 = s^2+(\ell_1+2)s+(1+\ell_1+\ell_2).$$

Motsvarande karaktäristiska ekvation, för polplaceringen med poler i -2 och -3 är $0 = (s+2)(s+3) = s^2+5s+6$. Alltså $\ell_1 + 2 = 5$, dvs $\ell_1 = 3$, och $\ell_1 + \ell_2 + 1 = 6$, dvs $\ell_2 = 2$.

Det återstår att bestämma ℓ_0, så att rätt stationära värde fås. I stationaritet gäller $\dot{x}(t) = 0$, alltså

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - BL)x + B\ell_0 u = \begin{pmatrix} -1-\ell_1 & -\ell_2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \ell_0 \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Andra raden ger $x_1 = x_2$. Insatt i första raden ger det

$$0 = (-1-\ell_1)x_1 - \ell_2 x_2 + \ell_0 u \Leftrightarrow (1+\ell_1+\ell_2)x_1 = \ell_0 u.$$

Alltså välj $\ell_0 = 1 + \ell_1 + \ell_2 = 6$ för att få den statiska förstärkningen 1.

Svar: $u(t) = -3x_1(t) - 2x_2(t) + 6r(t)$