Lösningar till tentamen i Reglerteknik (TSIU61)

Tentamensdatum: 4 januari 2018

1. (a) **A–II, B–IV, C–I, D–III.**

   B och D har resonanstopp ⇒ II och IV med översläng. B större resonanstopp, matchar tydligare svängingar i IV. Alltså D–III. A större bandbredd än C, och II snabbare än I. Alltså A–II och C–I.

   (b) $y(t) = 0.7\sin(5t - 1.17)$ **och** $0.23\,\mathrm{s}$ **fördröjning.**

   Stabilt lineärt system ⇒ sinus in, sinus ut, alltså $y(t) = |G(5i)|\sin(5t + \arg G(5t))$. $|G(5i)| \approx 0.7$ och $\arg G(5i) \approx -67° \approx -1.17\,\mathrm{rad}$. $1.17\,\mathrm{rad}$ svarar vid $5\,\mathrm{rad/s}$ mot $1.17/5 \approx 0.23\,\mathrm{s}$ fördröjning.

2. (a) $G_{h_A}(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+1}$

   Alt 1:.

$$x(t) = \begin{pmatrix} h_A(t) \\ h_B(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) &&= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= Cx(t) &&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

   Då gäller: $Y(s) = C(Is - A)^{-1}BU(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+1}U(s)$

   Alt 2: Laplacetransformera de två diff. ekv.:

$$\begin{aligned} sH_A(s) &= -H_A + H_B + U(s) \\ sH_B(s) &= H_A(s) - 2H_B(s) \qquad &&\Rightarrow H_B(s) = H_A/(s+2). \end{aligned}$$

   Sätt in det sista uttrycket i första ekvationen, och lös ut $H_a(s)$,

$$\begin{aligned} sH_A(s) = -H_A(s) + H_A/(s+2) + U(s) \Rightarrow sH_A(s) &= -(s+1)/(s+2)H_A(s) + U(s) \\ \Rightarrow H_A(s) &= \frac{s+2}{s^2+3s+1}U(s). \end{aligned}$$

   (b) $u(t) = \frac{16}{19}u(t - \frac{1}{4}) + \frac{6}{19}e(t) - \frac{4}{19}e(t - \frac{1}{4}) \approx 0.84u(t - \frac{1}{4}) + 0.32e(t) - 0.21e(t - \frac{1}{4})$

   Transformera tillbaka till diff. ekv. (antag initialtillstånd 0):

$$U(s) = \frac{s+2}{4s+3}E(s) \Leftrightarrow 4sU(s) + 3U(s) = sE(s) + 2E(s) \Rightarrow 4\dot{u}(t) + 3u(t) = \dot{e}(t) + 2e(t)$$

   Approx. derivator med euleroperatorn, Δ_e, och använd $\Delta_e u(t) = \frac{1}{T}(u(t) - u(t-T))$ och analogt för $\Delta_e e(t)$:

$$\begin{aligned} 4\Delta_e u(t) + 3u(t) = \Delta_e e(t) + 2e(t) &\Rightarrow \tfrac{4}{T}\big(u(t) - u(t-T)\big) + 3u(t) = \tfrac{1}{T}\big(e(t) - e(t-T)\big) + 2e(t) \\ &\Leftrightarrow (4+3T)u(t) = 4u(t-T) + (1+2T)e(t) - e(t-T) \\ &\Leftrightarrow u(t) = \tfrac{4}{4+3T}u(t-T) + \tfrac{1+2T}{4+3T}e(t) - \tfrac{1}{4+3T} = \tfrac{16}{19}u(t-\tfrac{1}{4}) + \tfrac{6}{19}e(t) - \tfrac{4}{19}e(t-\tfrac{1}{4}). \end{aligned}$$

3. $F(s) = 0.32 \cdot \frac{25s+1}{25s}$.

   Fasen vid $\omega_{c,d} = 0.4\,\mathrm{rad/s}$ är $\arg G(0.4i) \approx -63.5°$, alltså uppfylls fasmarginalkravet även om en lag-länk krävs. En P-regulartor ger rätt skärfrekvens och fasmarginal. Välj förstärkningen så $K_P = 1/|G(0.4i)| \approx 1/3.1 \approx 0.32$.

   Återstår, kravet på det stationära felet. För att felet helt ska regleras bort krävs att det öppna systemet har en pol i origo, dvs $\gamma = 0$ i laglänken, och välj $\tau_I = 10/\omega_{c,d} = 25$ enligt tumregel: $F_{\mathrm{lag}}(s) = \frac{25s+1}{25s}$.

4. (a) $Y(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)}V(s) - \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}N(s) = \frac{s+1}{s+1+K}V(s) - \frac{K}{s+1+K}N(s)$

   (b) $S(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)} = \frac{s+1}{s+1+K}$, $|S(i\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\sqrt{\omega^2+(1+K)^2}}$ **och** $K > 13.2$ **för att uppfylla kravet.**

Känslighetsfunktionen är: $S(s) = \frac{1}{1+G(s)F(s)}$, och absolutbelopp: $|S(i\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2+1}}{\sqrt{\omega^2+(1+K)^2}}$. Vidare $K > 0 \Rightarrow 1 < 1 + K \Rightarrow |S(i\omega)| < 1$.

För del 2, för $\omega = 1$ beräkna K så att $|S(i1)| = 0.1$

$$\sqrt{1+1} = 0.1\sqrt{1+(1+K)^2} \Rightarrow 199 = (1+K)^2 \Leftrightarrow K = -1 \pm \sqrt{199}.$$

$K > 0$ ger att endast lösningen $-1+\sqrt{199}$ är möjlig, vidare är förstärkningen vid $K = 0$ 1, alltså uppfylls kravet för $K > -1+\sqrt{199}$.

5. (a)

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

(b) $L = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 4 \end{smallmatrix} \right)$

Det återkopplade systemets poler ges av egenvärdena till $A_c = A - BL = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -\ell_1 & -\ell_2 \end{smallmatrix} \right)$. Det karaktäristiska polynomet blir $\det(Is - A_c) = \det\left(\begin{smallmatrix} s & -1 \\ \ell_1 & s+\ell_2 \end{smallmatrix} \right) = s^2 + \ell_2 s + \ell_1$. Önskat karaktäristiskt polynom: $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = s^2 + 4s + 4$. Identifiering av koefficienterna ger: $\ell_1 = \ell_2 = 4$.

(c) $\ell_0 = 4$

Vid stationaritet gäller:

$$0 = x_2, \quad 0 = -\ell_1 x_1 - \ell_2 x_2 + \ell_0 r = -\ell_1 x_1 + \ell_0 r \Rightarrow \ell_0 = \ell_1 = 4$$