Lösningar till tentamen i Reglerteknik (TSIU61)

Tentamensdatum: 24 augusti 2018

1. (a) **(i)–D, (ii)–C, (iii)–B, (iv)–A**

   Större ω_0 betyder snabbare stegsvar, mindre ζ svängigare stegsvar. C är snabbt och svängigt, dvs (ii). D är bäst dämpat, alltså (i). A och B, lika dämpade men A snabbast, alltså A–(iv) ocb B–(iii).

   (b) **Systmet är instabilit, utsignalen växer obegränsat.**

   Observera att eftersom systemet är instabilt (en pol i +4), gäller inte sinus-in–sinus ut.

2. (a) $\boldsymbol{S(s) = \frac{1/5G}{1+F(s)G(s)} = \frac{-1}{50s+1+5K}}$

   (b) $\boldsymbol{K \geq -\frac{1}{5} + \sqrt{3} \approx 1.54}$

   $S(s)$ är ett stabilt lineärt system, allså gäller sinus-in–sinus-ut, stationär utsignal. Med $v(t) = \sin 0.1t$ blir $e(t) \leq |S(0.1i)| \sin(0.1t + \arg(S(0.1i))$. $|\sin(x)| \leq 1$, alltså $|e(t)| \leq |S(0.1i)| = 0.1$ enligt krav i uppgiften. Lös ut det K som ger likhet i sista steget, $K = -\frac{1}{5} \pm \sqrt{3}$, där den negativa lösningen förkastas då $K \geq 0$. $K = 0$ ger $S(0.1i) = \frac{1}{\sqrt{26}} \geq 1/\sqrt{100} = 0.1$. alltså gäller $K \geq -\frac{1}{5} + \sqrt{3}$.

3. (a) $\boldsymbol{e_0 = 0,\ e_1 = 0.32}$

   De efterfrågade felen sammanfaller med felkoefficienterna e_0 och e_1, vilka för stabila system kan beräknas enligt ($G_o(s) = KG(s)$):

$$e_0 = \lim_{s \to 0^+} \frac{1}{1 + G_o(s)} = 0, \quad \text{ty } G_o(s) \to \infty, \text{ då } s \to 0^+$$

$$e_1 = \lim_{s \to 0^+} \frac{1}{sG_o(s)} = \lim_{s \to 0^+} \frac{1}{sK\frac{10}{s(s+8)(s+2)}} = \lim_{s \to 0^+} \frac{(s+8)(s+2)}{10K} = \frac{16}{10K} = 0.32$$

   (b) $\boldsymbol{U(s) = 5\frac{5s+1}{5s+0.01}(R(s) - Y(s))}$

   Krav på regulatorn: $e_1 < 0.32/100$, enligt svaret i a), och skärfrekvens och fasmarginal ska inte ändras mer än nödvändigt.

   Notera att den givna regulatorstruktuern är en lag länk, vilken används för att kompensera för stationära fel. Det ger oss en metodik att använda mha (lead-)-lag-design där vi bara skippar första delen.

   Först hitta skärfrekvensen för $KG(s)$, $\omega_c \approx 2\,\text{rad/s}$. Enligt tumregeln i boken ger det $\tau_I = 10/w_c \approx 5$. Återstår att välja γ för att minska felkoefficienterna. För låga frekvenser bidrar lag-länken med förstärkningen $1/\gamma$. Vi vill enligt uppgiften sänka det stationära felet 100 ggr, vilket ger att vi måste öka förstärkningen 100 ggr, dvs $1/\gamma = 100$ och $\gamma = 1/100$. (Självklart kan man också explicit räkna ut e_0 och e_1 igen för att på så sätt bestämma γ.)

4. (a) $\boldsymbol{L = (\ell_1\ \ell_2) = (2\ 0)}$

   Dynamiken för det återkopplade systemet ges av $\dot{x}(t) = (A - BL)x(t) + \ell_0 r(t)$, vars poler ges av rötterna till det karaktäristiska polynomet

$$\det(sI - (A - BL)) = \det\left(sI - \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 \end{pmatrix}\right)\right) = \det\begin{pmatrix} s-1 & 3 \\ \ell_1 & -s+4+\ell_2 \end{pmatrix}$$
$$= (s-1)(s+4+\ell_2) + 3\ell_1 = s^2 + (3+\ell_2)s + (3\ell_1 - \ell_2 - 4)$$

   Det önskade karaktäristiska polynomet är: $(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$. Matcha koefficienterna ger: $\ell_2 = 0$ och $\ell_1 = \frac{1}{3}(2 + 4 + \ell_2) = 2$.

   (b) $\boldsymbol{\ell_0 = \frac{2}{3}}$

   Vid stationaritet ska gälla $y = (1\ 0)x = x_1 = r$ och $\dot{x} = \binom{0}{0}$. Första raden ger $0 = x_1 + 3x_2$ och $x_2 = -\frac{1}{3}r$. Rad två ger $0 = -\ell_1 x_1 - (4+\ell_2)x_2 + \ell_0 r$, stoppa in vad vi vet ger $0 = -2r + \frac{4}{3}r + \ell_0 r$. Alltså $\ell_0 = \frac{2}{3}$.

5. (a) **Max relativt fel: $-3\,\mathrm{dB} \approx 0.71$**

Enligt robusthetskritieret måste vi ha $|\Delta(i\omega)| \leq \frac{1}{|T(i\omega)|}$ i alla frekvenser. Eftersom $\Delta(i\omega)$ är frekvensoberoende, så måste kravet gälla då högerledet är som minst, dvs då $|T(i\omega)|$ är som störst. Största värdet erhålls i dess resonanstopp, och den är där $3\,\mathrm{dB} \approx 1.41$. Det relativa modellfelet måste sålunda uppfylla $|\Delta| \leq \frac{1}{1.41} = 0.71$.

(b) **Max tidsfördröjning: $\frac{\pi}{4}$**

En tidsfördröjning T med överföringsfunktion e^{-sT} ger fasförlusten ωT. Vi vet att denna förlust är $\pi/2$ då $\omega = 2$. Lösning av $2T = \pi/2$ ger $T = \pi/4$.

(c) $\boldsymbol{u(t) = -\frac{1}{3}u(t-\frac{1}{5}) + 5e(t) - \frac{5}{3}e(t-\frac{1}{5})}$

Skriv om regulatorn i tidsdomänen, för steglängden T: $\dot{u}(t) + 20u(t) = 10\dot{e}(t) + 50e(t)$. Approximera med Tustins derivata approximation, $\dot{u}(t) \approx \Delta_t u(t)$ osv: $\Delta_t u(t) + 20u(t) = 10\Delta_t e(t) + 50e(t)$, och fördröjt ett steg $\Delta_t u(t-T) + 20u(t-T) = 10\Delta_t e(t-T) + 50e(t-T)$. Addera de två: $(\Delta_t u(t) + \Delta_t u(t-T)) + 20u(t) + 20u(t) = 10(\Delta_t e(t) + \Delta_t e(t-T)) + 50e(t) + 50e(t-T)$. Substituera in $\Delta_t u(t) + \Delta u(t-T) = \frac{2}{T}(u(t) - u(t-T)) = 10(u(t) - u(t-\frac{1}{5}))$ och samma för e ger $10(u(t) - u(t-\frac{1}{5})) + 20u(t) + 20u(t-\frac{1}{5}) = 100(e(t) - e(t-\frac{1}{5})) + 50e(t) + 50e(t-\frac{1}{5}))$. Förenkla och lös ut $u(t)$ ger lösningen $u(t) = -\frac{1}{3}u(t-\frac{1}{5}) + 5e(t) - \frac{5}{3}e(t-\frac{1}{5})$.