Lösningsförslag till tentamen i Reglerteknik (TSIU61) 2018-10-22

1. (a) Först faktoriserar vi $G(s)$ till

$$\frac{s+2}{(s+1)(s+1)}.$$

Detta ger oss att G ar ett nollställe i s=-2 och två poler i s=-1.

Svar: En dubbelpol i s=-1 och ett noställe i s=-2.

(b) För att bestämma vilket system som har kortast stigtid dvs. vilket system som är snabbast undersöker vilket system vars poler ligger längst ifrån origo. Alla system är av första ordningen, dvs har bara en pol. G_1 har sin pol är i -1, G_2 i -0.1, G_3 i -5, G_4 i -100, och G_5 i -10. Dvs G_4 är snabbast.

Svar: G_4 är det snabbaste systemet eftersom dess pol $s = -100$ ligger längst till vänster på reella axeln.

(c) A Det givna systemets förstärkning är alltid mindre än eller lika med ett för alla frekvenser. Insignalen har amplitud ett och därmed kan inte utsignalen har en amplitud större än ett.

B Insignalen är en sinussignal som varierar kring noll, och därmed kommer utsignalen att variera ring noll. Signalen i B varierar kring ett vilket inte kan inträffa under givna förutsättnignarna.

C Utsignalen har dubbelt hög vinkelfrekvens (hälften så stor periodtid) som insignalen, vilket inte kan inträffa för den typ av system vi tittar på.

2. (a) i. Integrerande del tar bort stationära fel. Vi kan därför para ihop A och D med (iii) och (iv) respektive B och C med (i) och (ii).

	A	B	C	D
(i)	X			X
(ii)	X			X
(iii)		X	X	
(iv)		X	X	

ii. Skillnaden mellan (iii) och (iv) är att (iii) har en deriverande del, vilket dämpar oscillationer. Stegsvaret D har mindre oscillationer än A, vilket ger **A - iv** och **D - iii**.

	A	B	C	D
(i)	X			X
(ii)	X			X
(iii)	X	X	X	O
(iv)	O	X	X	X

iii. Skillnaden mellan (i) och (ii) är att (i) har större I-del. Större I-del leder generellt till större oscillationer, vilket ger **B - ii** och **C - i**.

	A	B	C	D
(i)	X	X	O	X
(ii)	X	O	X	X
(iii)	X	X	X	O
(iv)	O	X	X	X

Svar: A - iv, B - ii, C - i, D - iii.

(b) Från uppgifts formuleringen vet vi att

$$U(s) = \frac{s+1}{4s+2}E(s).$$

Multiplikation med högerledets nämnare på båda sidorna ger oss

$$U(s)(4s+2) = (s+1)E(s).$$

Inversa laplace transformen ger oss

$$4\dot{u}(t) + 2u(t) = \dot{e}(t) + e(t).$$

Om vi nu använder Eulers approximationsformel med $T = 0.1$ som säger att

$$\dot{u}(t) \approx \frac{1}{T}(u(t) - u(t-T)) = 10u(t) - 10u(t-0.1)$$

och

$$\dot{e}(t) \approx \frac{1}{T}(e(t) - e(t-T)) = 10e(t) - 10e(t-0.1),$$

får vi

$$40u(t) - 40u(t-0.1) + 2u(t) = 10e(t) - 10e(t-0.1) + e(t),$$

vilket kan skrivas som

$$u(t) = \frac{20}{21}u(t-0.1) + \frac{11}{42}e(t) - \frac{5}{21}e(t-0.1).$$

Svar: $u(t) = 0.95u(t-0.1) + 0.26e(t) - 0.24e(t-0.1)$

3. (a) Tillståndsåterkopplingen

$$u = -Lx + l_0 r$$

ger den karakteristiska ekvationen

$$\det(sI - (A - BL)) = s^2 + (l_1 + 3)s + 2l_1 + l_2 + 1 = 0$$

Med önskad polplacering i -2 fås den önskade karakteristiska ekvationen

$$(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4 = 0$$

En jämförelse mellan ekvationerna ger

$$l_1 = 1 \quad l_2 = 1$$

Detta ger återkopplingen

$$u(t) = -x_1(t) - x_2(t) + r(t)$$

Svar: $u(t) = -x_1(t) - x_2(t) + r(t)$, $L = [1, 1]$

(b) När insignalen är konstant $u = \bar{u}$ fås i stationärt tillstånd, d v s då $\dot{x}_1 = 0$ och $\dot{x}_2 = 0$ att

$$0 = -x_1 + x_2 + \bar{u}$$

och

$$0 = x_1 - 2x_2$$

där den andra ekvationen ger det sökta sambandet, d v s

$$x_1 = 2x_2$$

I stationärt tillstånd är det konstant nivå i båda tankarna, d v s det rinner in lika mycket som det rinner ut. Eftersom det rinner ut vatten ur den höga tanken måste det rinna in vatten från den vänstra, och för att det ska göra det måste det vara högre nivå, vilket ger högre tryck vid botten av tanken, i den vänstra. □

4. (a) Överföringsfunktionen från processbruset $v(t)$ till utsignalen $y(t)$ ges av känslighetsfunktionen $S(s)$. När $|S(i\omega)| < 1$ så kommer störningarna i systemet att undertryckas. Värt att komma ihåg är att $1 = 0dB$. Om vi studerar amplitudkurvan i Figur 5 (b), ser vi att för en vinkelfrekvens mindre än $\omega \approx 1.4$ rad/s så kommer $|S(i\omega)| < 1$.

Svar: $\omega < 1.4$ rad/s.

(b) Överföringsfunktionen från mätstörningen $n(t)$ till utsignalen $y(t)$ är densamma som överföringsfunktionen från referens signalen $r(t)$ till utsignalen $y(t)$ bortsett från tecknet. Dvs. vi kan studera amplitudkurvan i Figur 5 (a), $G_c(s)$. Vid 10 rad/s så är $|G_c(s)| < 1$ (kommer att vara kring -30 dB), vilket ger oss att mätbrus med frekvensen 10 rad/s kommer att undertryckas.

Svar: Undertryckas

(c) En första observation är att den komplementära känslighetsfunktionen $T(s)$ är samma som överföringsfunktionen för det slutna systemet $G_c(s)$. Det rellativa modellfelet är $\Delta_G(s) = 0.1\alpha$ där $|\alpha| < 0.1$. Från robusthetskriteriet vet vi att systemet är stabilt om

$$|\Delta_G(i\omega)| \leq \frac{1}{|T(i\omega)|} \text{ för alla } \omega$$

eller

$$|T(i\omega)| \leq \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} = \frac{1}{|0.1\alpha|} \text{ för alla } \omega.$$

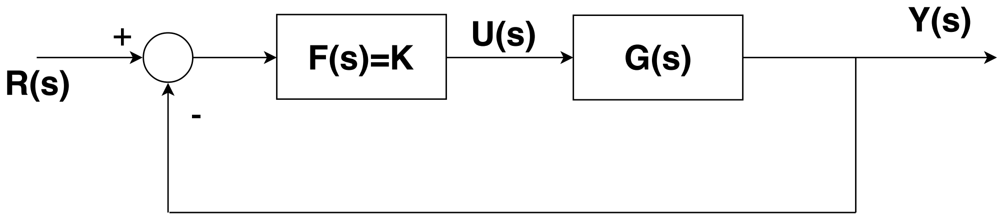
Vi vet att $|\alpha| < 0.1$ vilket ger oss att

$$|T(i\omega)| < \frac{1}{0.1^2} = 100.$$

Detta ska gälla för alla ω och eftersom Δ_G inte beror på vinkelfrekvensen ω så räcker det att kontrollera att resonanstoppen ho $G_c(i\omega)$ är mindre än 100. Från bodeploten för det slutna systemet $G_c(s)$ syns det tydligt att toppen för amplitudkurvan är kring 0dB=1. Detta ger oss att stabilitet är garanterat.

Svar: Stabilitet är garanterat.

5. (a) I Figur 1 är blockschemat för systemet givet.



Figur 1: Blockschema för systemet.

Det återkopplade systemets överföring funktion gest av

$$G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + G(s)F(s)}. \tag{1}$$

Insatt $F(s) = K$ och $G(s) = \frac{k_0}{s(\tau s+1)}$ ges det $G_c(s)$ av

$$\frac{K\frac{k_0}{s(\tau s+1)}}{1 + K\frac{k_0}{s(\tau s+1)}} = \frac{Kk_0}{s(\tau s + 1) + k_0 K} = \frac{Kk_0}{\tau s^2 + s + k_0 K} = \frac{\frac{Kk_0}{\tau}}{s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{Kk_0}{\tau}}. \tag{2}$$

Insatt $k_0 = 50$ och $\tau = 0.25$ blir överförings funktionen

$$G_c(s) = \frac{200K}{s^2 + 4s + 200K}$$

Svar: Figure 1 och $G_c(s) = \frac{200K}{s^2+4s+200K}$

(b) Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation ges av

$$s^2 + \frac{1}{\tau}s + \frac{Kk_0}{\tau} = 0$$

vilket med insatta värden ger $s^2 + 4s + 200K = 0$. Detta medför att systemets poler ges av $s = -2 \pm \sqrt{4 - 200K}$. För stora K blir polerna komplexa. Realdelen är dock alltid negativ, dvs systemet kan ej bli instabilt.

Svar: Systemet är alltid stabilt.