Lösningar till tentamen i Reglerteknik TSIU61

Tentamensdatum: 2019-01-09

Inger Erlander Klein

1. (a) Överföringsfunktionen $G(s)$ är $\frac{3s+1}{s^2+2s+1}$.

   (b) Systemet $G(s)$ är insignal-utsignalstabilt för $\alpha > 0$. Det innebär att stegsvaret $y(t)$ går mot ett slutvärde och slutvärdesteoremet ger

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{\beta}{s+\alpha}\frac{u_0}{s} = \frac{\beta u_0}{\alpha}$$

   (c) Ur figuren fås

$$Z(s) = \frac{c}{s\beta+1}Y(s)$$

   För en given signal $y(t) = A\sin(\omega t)$ så ges utsignalen (efter transienter) av

$$z(t) = A\left|\frac{c}{\beta\omega i+1}\right| \sin\big(\omega t - \arctan(\beta)\big)$$

   Ur figuren avläses amplituden och vinkelfrekvensen för $y(t)$ till $A = 4$ och $\omega = 1\,\text{rad/s}$ och för $z(t)$ avläses amplituden 2.75 och fasförskjutningen $-0.8\,\text{rad}$. Detta ger följande ekvationer:

$$4\frac{c}{\sqrt{\beta^2+1}} = 2.75$$
$$-\arctan(\beta) = -0.8$$

   med lösning $\beta \approx 1$ och $c \approx 1$.

2. (a) Samtliga system har två poler och statisk förstärkning 1.

$G_4(s)$ har två poler i -2 samt ett nollställe i -1, vilket innebär att amplitudkurvan kommer att börja luta "uppåt" omkring $\omega = 1$ för att sedan börja luta "nedåt" efter $\omega = 2$. Således $G_4(s) = A$.

$G_3(s)$ har ett komplexkonjugerat polpar i $-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Detta innebär att amplitudkurvan har en resonanstopp, och den enda amplitudkurvan som uppfyller detta krav är B. Således $G_3(s) = B$.

$G_1(s)$ och $G_2(s)$ har samma principiella form eftersom de har samma antal poler och nollställen, endast reella dubbelpoler och samma stationära förstärkning. Dock kommer $G_1(s)$ ha större bandbredd än $G_2(s)$ eftersom $G_1(s)$ har sina poler längre in i vänster halvplan än $G_2(s)$. Högre bandbredd betyder att amplitudkurvan bryter av först vid högre frekvenser. Således är $G_1(s) = D$ och $G_2(s) = C$.

(b) Systemet är $m\ddot{y}(t) = u(t) - f\dot{y}(t) - ky(t)$. Tillstånden

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned}$$

har därmed derivatorna

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{m}(u(t) - fx_2(t) - kx_1(t)) \end{aligned}$$

som kan skrivas på formen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -f/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Med värdena $m = k = 1$ och $f = 0.2$ insatta får vi systemet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. (a) Känslighetsfunktionen ges av

$$S(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)} = \frac{1}{1+\frac{5K}{(s+1)^2}} = \frac{(s+1)^2}{(s+1)^2+5K} = \frac{(s+1)^2}{s^2+2s+1+5K}$$

Absolutbeloppet av känslighetsfunktionen vid $\omega = 0$ ges då av

$$|S(0)| = \frac{1}{1+5K}$$

Det givna kravet ger att

$$\frac{1}{1+5K} < 0.01$$

vilket ger $K > 99/5 \approx 20$.

(b) Känslighetsfunktionen beskriver hur störningar på utsignalen fortplantas till utsignalen vid olika frekvenser. Dessa vill vi dämpa och därmed bör dess amplitud vara låg i alla frekvenser. Känslighetsfunktionen beskriver även hur felet $e(t)$ beter sig och eftersom även den bör vara liten önskas en låg amplitud hos känslighetsfunktionen.

4. (a) Det återkopplade systemets karakteristiska ekvation fås via överföringsfunktionen

$$G_C(s) = \frac{F(s)G(s)}{1+F(s)G(s)}$$

vilket med

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \quad F(s) = K_p + K_d\frac{s}{1+sT}$$

ger

$$G_C(s) = \frac{s(K_pT+K_d)+K_p}{s^3T+s^2+s(K_pT+K_d)+K_p}$$

Den karakteristiska ekvationen är således

$$Ts^3 + s^2 + s(TK_p + K_d) + K_p = 0 \tag{1}$$

om $T \neq 0$ och

$$s^2 + sK_d + K_p = 0 \tag{2}$$

om $T = 0$.

(b) Ifall systemets poler ska vara placerade i -2 om $T = 0$ så ska den karakteristiska ekvationen för systemet vara $(s+2)^2 = s^2 + 4s + 4 = 0$. K_d och K_p i ekvation (2) kan därmed enkelt identifieras som $K_d = 4$ och $K_p = 4$.

(c) Om $T > 0$ så fås den karekteristiska ekvationen (1) dvs vi får tre poler istället för två.

5. (a) Modellen med insatta koefficientvärden ges av

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

med matriserna

$$A = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tillståndsåterkopplingen

$$u(t) = -Lx(t) + r(t)$$

ger

$$\dot{x}(t) = (A - BL)x(t) + Br(t)$$

med den karakteristiska ekvationen

$$\det(sI - A + BL) = \det \begin{pmatrix} s + 1/3 & -2/3 \\ 5l_1 & s + 1 + 5l_2 \end{pmatrix} = (s + 1/3)(s + 1 + 5l_2) + \frac{10}{3} l_1 =$$

$$= s^2 + (\frac{4}{3} + 5l_2)s + \frac{1}{3}(1 + 5l_2 + 10l_1)$$

Återkoppling som placerar polerna i $-\alpha$ motsvarar en karakteristisk ekvation

$$(s + \alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 = 0$$

vilket ger ekvationerna

$$\frac{4}{3} + 5l_2 = 2\alpha$$

och

$$\frac{1}{3}(1 + 5l_2 + 10l_1) = \alpha^2$$

Ur dessa ekvationer kan l_1 och l_2 lösas ut och lösningarna blir

$$\begin{aligned} l_1 &= 0.3(\alpha - \frac{1}{3})^2 \\ l_2 &= 0.4(\alpha - \frac{2}{3}) \end{aligned}$$

(b) Det återkopplade systemet ges av

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -5l_1 & -1 - 5l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} r(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v(t) \qquad y(t) = (1 \;\; 0)x(t)$$

I stationärt tillstånd gäller att $\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = 0$, och för $r(t) = 0$ och $v(t) = v_0$ fås då

$$x_1(t) = 2x_2(t) + 3v_0$$

och

$$(1 + 5l_2)x_2(t) = -5l_1 x_1(t)$$

Detta ger

$$x_2(t) = \frac{-5l_1}{1 + 5l_2} x_1(t)$$

vilket insatt i den första ekvationen ger

$$x_1(t)(1 + \frac{10l_1}{1 + 5l_2}) = 3v_0$$

$$y(t) = x_1(t) = \frac{1 + 5l_2}{1 + 5l_2 + 10l_1} 3v_0$$

Med l_1 och l_2 enligt ovan fås att i stationärt tillstånd ges $y(t)$ av

$$y(t) = \frac{6\alpha - 1}{3\alpha^2} v_0$$